

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM QUADRICÓPTERO

Yuri Fiusa Yokota

São Paulo
2014

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM QUADRICÓPTERO

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

Yuri Fiusa Yokota

Orientador: Prof. Dr. Flávio C. Trigo

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2014

Yokota, Yuri Fiusa

Desenvolvimento de um quadricóptero / Y.F. Yokota. -- São Paulo, 2014.

175 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

**1.Veículo aéreo não tripulado (VANT) 2.Modelo dinâmico
3.Controle 4.Simulação numérica 5.Construção de protótipo
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.**

RESUMO

Neste trabalho é dado início ao desenvolvimento de um quadricóptero elétrico rádio controlado, que deverá servir como plataforma universal para pesquisas futuras envolvendo tanto modificações e aprimoramentos do protótipo em si, quanto a sua utilização no apoio a trabalhos correlatos. O projeto se inicia com a revisão bibliográfica sobre o tema, para a determinação do seu estado da arte. Em seguida, é obtido o sistema de equações diferenciais não lineares que representa o modelo dinâmico em malha aberta do quadricóptero. Prossegue-se, então, com a linearização do modelo e a sua representação em espaço de estados, juntamente com a determinação do esquema de sensoriamento necessário ao sistema de controle. Em seguida é conduzida a seleção e aquisição dos componentes, acompanhada do projeto do protótipo. Os parâmetros físicos do protótipo são então obtidos, permitindo a simulação, validação e análise do modelo não linear em malha aberta. Com base nas respostas obtidas, é feito o desenvolvimento teórico do sistema de controle capaz de adequar o comportamento dinâmico do modelo em malha fechada, permitindo que este cumpra com os requisitos de desempenho impostos. Por fim, o projeto é concluído com a construção do protótipo.

ABSTRACT

In this work it is initiated the development of an electric radio controlled quadcopter, which should serve as a universal platform for future research involving both modifications and improvements of the prototype itself, as its use in the support of related work. The project begins with the literature review on the topic, for the determination of its state of the art. Then, it is obtained the system of nonlinear differential equations that represents the open loop dynamic model of the quadcopter. The project continues with the linearization of the model and its representation in state space, along with the determination of the necessary sensors setup for the control system. Then it is conducted the selection and acquisition of the components, together with the design of the prototype. The physical parameters of the prototype are then obtained, allowing the simulation, validation and analysis of the non-linear model in open loop. Based on the responses, it is made the theoretical development of the control system capable to adjust the dynamic behavior of the closed loop model, allowing it to comply with the imposed performance requirements. Finally, the project is concluded with the construction of the prototype.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Foto do Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 (BRÉGUET, 1907).....	2
Figura 1.2 – Modelo do Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 (THE PIONEERS, 2002)....	2
Figura 4.1 – Esquema de rotação dos rotores de um quadricóptero.....	8
Figura 6.1 – Orientação do sistema ΣE segundo os pontos cardeais	13
Figura 6.2 – Sistema ΣV em relação ao sistema ΣE	14
Figura 6.3 – Sistema ΣB em relação ao quadricóptero	15
Figura 7.1 – Exemplo da não comutatividade da composição de deslocamentos angulares em direções distintas	18
Figura 7.2 – Orientação de ΣB em relação a ΣV	19
Figura 8.1 – Representações individuais das rotações ψ (esquerda), θ (centro) e ϕ (direita)	21
Figura 9.1 – Representação de um ponto qualquer P segundo os referenciais ΣE e ΣB	29
Figura 10.1 – Corpo rígido de massa constante m segundo os sistemas ΣE e ΣB ...	32
Figura 10.2 – Corpo rígido de massa constante m segundo os sistemas ΣE , ΣB e ΣQ	34
Figura 11.1 – Forças e momentos atuantes sobre o quadricóptero	41
Figura 12.1 – Esquema de um motor elétrico controlado pela tensão no estator	53
Figura 16.1 – Rotores utilizados.....	72
Figura 16.2 – Um dos motores utilizados	73
Figura 16.3 – Um dos ESCs utilizados.....	74
Figura 16.4 – Uma das baterias utilizadas	75
Figura 16.5 – Transmissor Turnigy 9X 9Ch.....	77
Figura 16.6 – Receptor Turnigy 9X8C-V2	77
Figura 16.7 – Sensor BMA180 utilizado	79
Figura 16.8 – Sensor ITG3205 utilizado.....	80
Figura 16.9 – Um dos sensores de refletância utilizados	83
Figura 16.10 – Arduino DUE utilizado	86
Figura 16.11 – Conversor de nível lógico utilizado.....	87
Figura 17.1 – Braços em “X”	88
Figura 17.2 – Fixação central dos braços com auxílio das chapas de alumínio.....	89

Figura 17.3 – Adição dos reforçadores	90
Figura 17.4 – Detalhe da união entre os reforçadores e os braços	90
Figura 17.5 – Detalhe da fixação de um dos motores ao restante da estrutura	91
Figura 17.6 – Detalhe da posição de um ESC e de uma bateria em relação ao respectivo braço	92
Figura 17.7 – Modelo em CAD completo do protótipo.....	93
Figura 17.8 – Modelo simplificado do protótipo a ser utilizado para a análise pelo MEF.....	94
Figura 17.9 – Modelo carregado	95
Figura 17.10 – Máxima tensão normal	95
Figura 17.11 – Máxima tensão de cisalhamento	96
Figura 18.1 – Coeficiente de arrasto em função do Número de Reynolds (MUNSON, 2004)	102
Figura 18.2 – Balança dinamométrica.....	103
Figura 18.3 – Balança dinamométrica na configuração para medida da força de empuxo T_i	104
Figura 18.4 – Balança dinamométrica na configuração para medida do torque de arrasto Q_i	104
Figura 19.1 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 1	113
Figura 19.2 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 1	114
Figura 19.3 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 1.....	114
Figura 19.4 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 1	115
Figura 19.5 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 2	116
Figura 19.6 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 2	117
Figura 19.7 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 2.....	117
Figura 19.8 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 2	118
Figura 19.9 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 3	119
Figura 19.10 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 3	120
Figura 19.11 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 3....	120

Figura 19.12 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 3	121
Figura 19.13 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 4	122
Figura 19.14 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 4	123
Figura 19.15 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 4....	123
Figura 19.16 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 4	124
Figura 19.17 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 5	125
Figura 19.18 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 5	126
Figura 19.19 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 5....	126
Figura 19.20 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 5	127
Figura 19.21 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores	128
Figura 19.22 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores	129
Figura 19.23 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores	129
Figura 19.24 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores	130
Figura 20.1 – Diagrama de polos do sistema linearizado em malha aberta.....	132
Figura 22.1 – Gráfico das posições angules para a alocação de polos	136
Figura 22.2 – Gráfico das velocidades angulares para a alocação de polos	137
Figura 22.3 – Gráfico dos sinais de entrada de controle para a alocação de polos	137
Figura 23.1 – Gráfico das posições angules para o observador de estados.....	142
Figura 23.2 – Gráfico das velocidades angulares para o observador de estados...	142
Figura 23.3 – Gráfico dos sinais de entrada de controle para o observador de estados.....	143
Figura 24.1 – Gráfico das posições angules para o seguidor de referências.....	147
Figura 24.2 – Gráfico das velocidades angulares para o seguidor de referências..	147

Figura 24.3 – Gráfico dos sinais de entrada de controle para o seguidor de referências.....	148
Figura 25.1 – Placa de circuito para a interligação dos dispositivos eletrônicos ao Arduino DUE	149
Figura 25.2 – Placa de circuito montada	150
Figura 25.3 – Arduino DUE e o receptor montados abaixo da placa de circuito	150
Figura 25.4 – Fabricação de um dos componentes de madeira	151
Figura 25.5 – Estrutura sem os componentes eletrônicos sendo pesada	152
Figura 25.6 – Protótipo completo e finalizado	152

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Cronograma do projeto.....	7
Tabela 16.1 – Dispositivos a serem conectados	84
Tabela 19.1 – Conjunto de condições iniciais 1	113
Tabela 19.2 – Conjunto de condições iniciais 2	116
Tabela 19.3 – Conjunto de condições iniciais 3	119
Tabela 19.4 – Conjunto de condições iniciais 4	122
Tabela 19.5 – Conjunto de condições iniciais 5	125
Tabela 20.1 – Polos do sistema em malha aberta	131
Tabela 22.1 – Novo conjunto de polos	135
Tabela 22.2 – Condições iniciais para o sistema em malha fechada	136

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1	INTRODUÇÃO	1
2	OBJETIVO	4
3	DESCRIÇÃO DAS ETAPAS DO TRABALHO E METODOLOGIA.....	5
4	BREVE APRESENTAÇÃO DE UM QUADRICÓPTERO.....	8
5	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	10
6	SISTEMAS DE REFERÊNCIA	12
6.1	Sistema fixo.....	12
6.2	Sistema auxiliar	13
6.3	Sistema móvel.....	15
7	DEFINIÇÃO DAS COORDENADAS	16
7.1	Posição	16
7.2	Velocidade	17
7.3	Posição angular	17
7.4	Velocidade angular.....	20
8	VETORES E SISTEMAS DE REFERÊNCIA.....	21
8.1	Transformação de grandezas vetoriais lineares.....	21
8.1.1	Transformação entre os sistemas ΣV e ΣB	21
8.1.2	Transformação entre os sistemas ΣE e ΣV	24
8.1.3	Transformação entre os sistemas ΣE e ΣB	24
8.2	Transformação de derivadas de vetores	25
9	RELAÇÕES CINEMÁTICAS	29
9.1	Velocidade	29
9.2	Aceleração	30
9.3	Relação entre φ^B e ω^B	31
10	RELAÇÕES DINÂMICAS	32

10.1	Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento linear	32
10.2	Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento angular	34
11	DINÂMICA DO QUADRICÓPTERO	38
11.1	Forças e acelerações.....	38
11.2	Momentos e acelerações angulares	39
11.3	Resultantes externas	41
11.4	Força peso FW	42
11.5	Força de empuxo dos rotores FT	42
11.6	Força de sustentação aerodinâmica FL	43
11.7	Força de arrasto aerodinâmico FD	44
11.8	Momento causado pelo empuxo dos rotores MT	45
11.9	Momento causado pelo torque de arrasto dos rotores MQ	45
11.10	Momento causado pela força de sustentação aerodinâmica ML	46
11.11	Momento causado pela força de arrasto aerodinâmico MD	46
11.12	Momentos aplicados pelos rotores $MGyr$	46
11.13	Resultante das forças externas FB	48
11.14	Resultante dos momentos externos MB	49
11.15	Equações diferenciais do quadricóptero	50
12	DINÂMICA DOS MOTORES ELÉTRICOS.....	53
13	LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	57
14	REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA LINEARIZADO EM ESPAÇO DE ESTADOS	60
15	SENSORIAMENTO	67
16	SELEÇÃO DOS COMPONENTES.....	71
16.1	Rotores	71
16.2	Motores.....	72
16.3	ESCs.....	73
16.4	Bateria.....	74
16.5	Transmissor e receptor	75
16.6	Acelerômetro.....	78
16.7	Giroscópio.....	79
16.8	Tacômetro.....	80

16.9	Microcontrolador	84
16.10	Conversor de nível lógico.....	86
17	PROJETO DO PROTÓTIPO	88
17.1	Características gerais	88
17.2	Verificação pelo Método dos Elementos Finitos	93
18	PARÂMETROS FÍSICOS DO PROTÓTIPO.....	97
18.1	Parâmetros de distribuição de massa do protótipo	97
18.2	Parâmetros aerodinâmicos do protótipo	101
18.3	Parâmetros aerodinâmicos dos rotores	102
18.4	Parâmetros dos motores.....	108
19	SIMULAÇÃO DO MODELO NÃO LINEAR EM MALHA ABERTA.....	112
20	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO SISTEMA LINEAR EM MALHA ABERTA	131
21	ANÁLISE DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	133
22	CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE POLOS.....	134
23	CONTROLE COM OBSERVADOR DE ESTADO	139
24	SEGUIDOR DE REFERÊNCIAS.....	144
25	CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO.....	149
25.1	Placa de circuito.....	149
25.2	Estrutura	151
26	CONCLUSÕES	153
	REFERÊNCIAS.....	155
	APÊNDICE A – LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA	159
	Linearização da equação de x_E	159
	Linearização da equação de y_E	160
	Linearização da equação de z_E	161
	Linearização da equação de ϕ	162
	Linearização da equação de θ	162
	Linearização da equação de ψ	163
	Linearização da equação de u	163
	Linearização da equação de v	164
	Linearização da equação de w	165

Linearização da equação de p	167
Linearização da equação de q	170
Linearização da equação de r	173
Equação de Ω_i	175

1 INTRODUÇÃO

O crescente desenvolvimento de sistemas de sensoriamento e processamento compactos de uso comercial, alavancado pela grande disseminação de equipamentos que fazem uso desses dispositivos, tem proporcionado uma constante redução dos seus custos.

Sob essa conjuntura, os veículos aéreos não tripulados, ou VANTs, aeronaves que, dependendo do tipo e aplicação, podem requerer diversos sensores bem como um sistema de processamento embarcado para o controle da estabilização, navegação, transmissão de dados e recebimento de comandos, tem se tornado foco de estudos em muitos centros acadêmicos de cunho técnico-científico ao redor do globo, bem como em departamentos de pesquisa e desenvolvimento de setores industriais diversos.

Um tipo de VANT que vem ganhando popularidade são os multirotores, aeronaves cuja sustentação é proporcionada por rotores múltiplos independentes, na sua maioria coplanares e dispostos de maneira radialmente simétrica, capazes de voar segundo trajetórias diversas, bem como efetuar decolagens e pousos na vertical.

O conceito de multirotores data do início do século 20 (LEISHMAN, 2002), quando os franceses Louis e Jacques Bréguet, inspirados e orientados pelo trabalho de seu professor Charles Richet, começaram a trabalhar em protótipos desse tipo de aeronave. Após algumas tentativas fracassadas, o primeiro voo ocorreu em 1907 com a aeronave Bréguet-Richet Gyroplane No. 1. Embora a altitude alcançada não tenha ultrapassado 1,5 metros, tenham sido necessárias várias pessoas para mantê-lo estável, e o voo tenha durado menos de 1 minuto, aquele foi o primeiro multirrotor com quatro rotores, ou quadricóptero, com propulsão própria a alçar voo de que se tem registro. A figura 1.1 mostra uma foto do Bréguet-Richet Gyroplane No. 1, e a figura 1.2 um modelo computadorizado moderno da mesma aeronave.

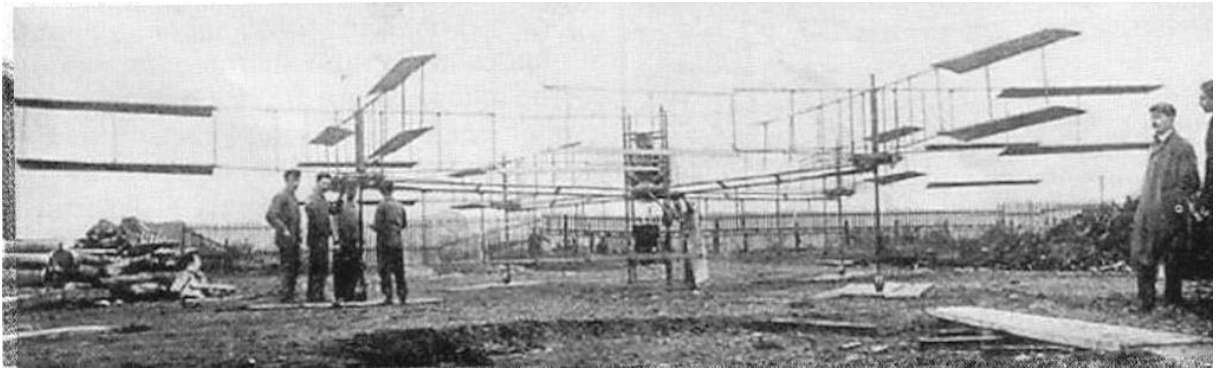


Figura 1.1 – Foto do Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 (BRÉGUET, 1907)

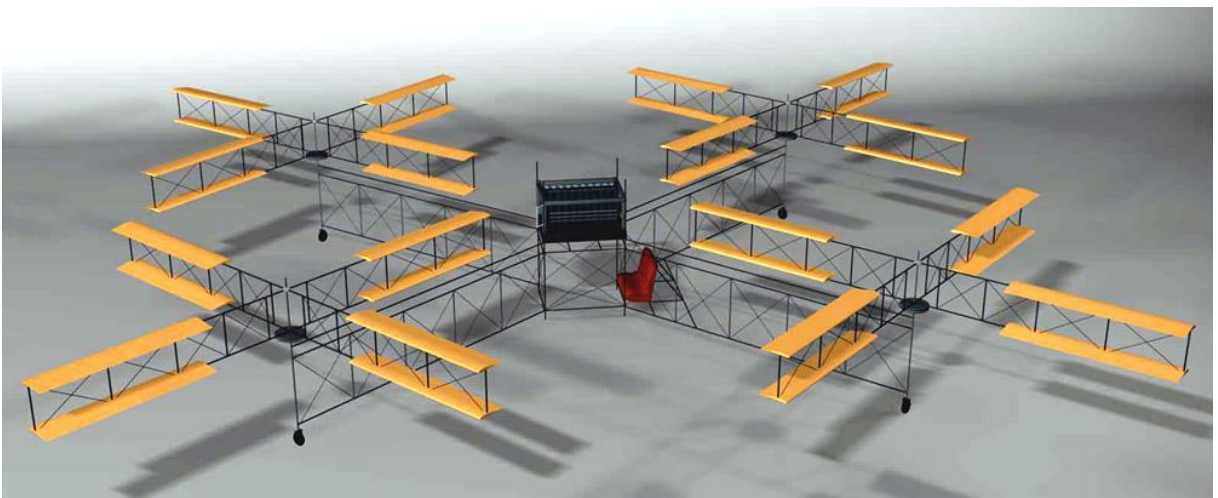


Figura 1.2 – Modelo do Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 (THE PIONEERS, 2002)

Desde então, até a segunda metade do século 20, o conceito pouco evoluiu, dada a instabilidade natural do sistema que exigia uma excepcional habilidade do piloto para manter um voo estável. Somente com o surgimento da eletrônica digital e de sistemas de controle automáticos, as pesquisas envolvendo veículos voadores dessa natureza passaram a ganhar maior atenção.

Graças as suas características operacionais, simplicidade mecânica e baixo custo, quando comparados a helicópteros convencionais, os multirotores, tais como os quadricópteros, têm encontrado cada vez mais aplicações tanto em atividades profissionais, como missões de busca e resgate, inspeções em áreas agrícolas, acompanhamentos climáticos, intervenções em ambientes hostis e filmagens aéreas, como em atividades de caráter recreativo, na forma de brinquedos rádio controlados.

Apesar disso, ainda são muitos os aspectos desses aparelhos que precisam ser melhorados tais como a reduzida capacidade de carga, o alto consumo de energia e baixa autonomia de voo, dentre outros.

Assim, devido ao seu grande potencial comercial e ao espaço significativo para melhorias de desempenho, fica claro o interesse no desenvolvimento dessas aeronaves.

2 OBJETIVO

O objetivo do presente trabalho é dar início ao desenvolvimento de um quadricóptero elétrico rádio controlado, que deverá servir como plataforma universal para pesquisas futuras que envolvam tanto modificações e aprimoramentos do protótipo em si, quanto a sua utilização no apoio a projetos correlatos.

As atividades a serem abordadas neste trabalho compreenderão: revisão bibliográfica, obtenção do modelo dinâmico não linear em malha aberta do quadricóptero, linearização do modelo não linear, representação do modelo linearizado em espaço de estados, estabelecimento do esquema de sensoriamento necessário ao sistema de controle, seleção e aquisição dos componentes necessários, execução do projeto do protótipo, obtenção dos seus parâmetros físicos, simulação e validação do modelo não linear em malha aberta, desenvolvimento teórico do sistema de controle e, por fim, construção do protótipo.

Idealmente, ao término do projeto, espera-se ter um protótipo pronto para receber o sistema de controle embarcado e capaz de executar os testes em banco de provas e em voo livre, necessários à sua validação.

No que diz respeito às características do protótipo a ser desenvolvido, o projeto será conduzido tendo em vista os seguintes requisitos: controle remoto por meio de um sistema de transmissor e receptor com comunicação via rádio, capacidade de decolagem e pouso na vertical sob o comando do piloto, capacidade de manter voo nivelado estável sem a necessidade de atuação do piloto, capacidade de realizar trajetos diversos sob o comando do piloto, massa total da aeronave igual ou inferior a 2 kg , empuxo total máximo igual ou superior a $1,5 X$ o peso da aeronave, área projetada máxima igual ou inferior a 1 m^2 .

3 DESCRIÇÃO DAS ETAPAS DO TRABALHO E METODOLOGIA

A seguir serão descritas as etapas a serem cumpridas para a conclusão do projeto e a metodologia utilizada. Vale ressaltar que essas descrições não visam pormenorizar o conjunto de tarefas de cada etapa, mas sim dar uma ideia geral do trabalho como um todo.

Primeiramente deve-se dar início à revisão bibliográfica. Esta etapa, que deve se estender ao longo de todo o projeto, visa à avaliação do estágio atual em que se encontram as pesquisas sobre o tema em mãos, bem como a aquisição do conhecimento teórico necessário ao seu desenvolvimento.

A etapa seguinte é a obtenção do sistema de equações diferenciais não lineares que representa o modelo dinâmico em malha aberta do quadricóptero. Os fenômenos reais a serem considerados no modelo, bem como a maneira como eles serão representados, deverá retratar um compromisso entre o desempenho final esperado do protótipo e a complexidade matemática resultante.

Em seguida deve-se efetuar a linearização do modelo não linear obtido, seguido da sua representação em espaço de estados, de forma a permitir o desenvolvimento de técnicas de controle moderno baseadas em sistemas lineares com parâmetros constantes no tempo. Neste ponto deverá ser estabelecido o esquema de sensoriamento necessário ao sistema de controle, bem como os métodos a serem empregados no processamento das medidas obtidas.

A próxima etapa é a seleção e aquisição dos componentes necessários, seguida do projeto do protótipo. Os principais componentes a serem adquiridos são: conjunto de sensores, dispositivo de processamento de dados, sistemas de sustentação e propulsão, sistema de baterias e sistema de rádio controle.

De posse dos componentes e do projeto, podem-se obter os parâmetros físicos do protótipo final, essenciais à validação do modelo não linear em malha aberta e ao desenvolvimento do sistema de controle. Para a obtenção dos parâmetros físicos deverão ser empregados métodos teóricos, numéricos e experimentais, sendo que para o último está previsto o desenvolvimento de dispositivos que permitam a execução dos ensaios.

Com os parâmetros físicos do protótipo em mãos, podem-se conduzir as simulações do modelo não linear em malha aberta, tanto para que este possa ser validado, quanto para que a natureza de seu comportamento dinâmico seja avaliada.

O desenvolvimento teórico do sistema de controle, passo seguinte, será conduzido em função das respostas obtidas anteriormente com as simulações do modelo em malha aberta. O seu objetivo é a adequação do comportamento dinâmico do modelo em malha fechada, de forma a permitir que este cumpra com os requisitos de desempenho impostos. Dadas as limitações do modelo dinâmico do quadricóptero e do sistema de controle, são esperadas diferenças entre o comportamento real do protótipo e o observado nas simulações do modelo em malha fechada, de modo que os parâmetros de controle preliminares obtidos nesta etapa deverão ser futuramente refinados através de ensaios com o protótipo.

A etapa final a ser abordada no presente trabalho é a construção do protótipo. A implementação do sistema de controle no hardware embarcado e a sua validação por meio de testes de campo serão abordados em trabalhos futuros.

É importante ressaltar que, apesar da aparente linearidade na execução das etapas, o que se tem de fato é um processo espiralado, onde com o decorrer do projeto o nível de conhecimento sobre o tema aumenta, permitindo que decisões tomadas em estágios iniciais sejam reconsideradas e, quando necessário, modificadas para refletir o atual estágio de conhecimento.

Ao longo do projeto estão previstas lacunas no cronograma de atividades, destinadas à redação de relatórios e artigos, assim como à preparação de apresentações e pôsters.

A tabela 3.1 mostra de forma condensada as etapas discutidas anteriormente.

Tabela 3.1 – Cronograma do projeto

	2013			2014											
	S	O	N	D	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N
Revisão bibliográfica	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Redação do relatório parcial de PME 2598	X	X													
Obtenção do modelo dinâmico não linear		X	X	X	X	X									
Redação do relatório final de PME 2598		X	X												
Linearização e representação do modelo em espaço de estados				X	X	X	X								
Redação do relatório parcial de PME 2599						X	X	X							
Seleção e aquisição dos componentes						X	X	X	X	X	X	X			
Projeto do protótipo							X	X	X	X	X	X			
Redação do relatório final e do artigo técnico de PME 2599								X	X	X					
Preparação da apresentação e do pôster de PME 2599									X	X					
Obtenção dos parâmetros físicos do protótipo									X	X	X	X	X		
Simulações do modelo não linear em malha aberta										X	X	X	X	X	
Redação do relatório parcial de PME 2600											X	X	X		
Desenvolvimento do sistema de controle										X	X	X	X	X	X
Construção do protótipo													X	X	X
Redação do relatório final e do artigo técnico de PME 2600													X	X	X
Preparação da apresentação e do pôster de PME 2600														X	X

4 BREVE APRESENTAÇÃO DE UM QUADRICÓPTERO

Quadricópteros são aeronaves sustentadas pelo empuxo gerado por quatro rotores dispostos normalmente em forma de cruz, sendo um par (1, 3) com rotação em um sentido e o outro (2, 4) com rotação no sentido contrário, conforme ilustra a figura 4.1.

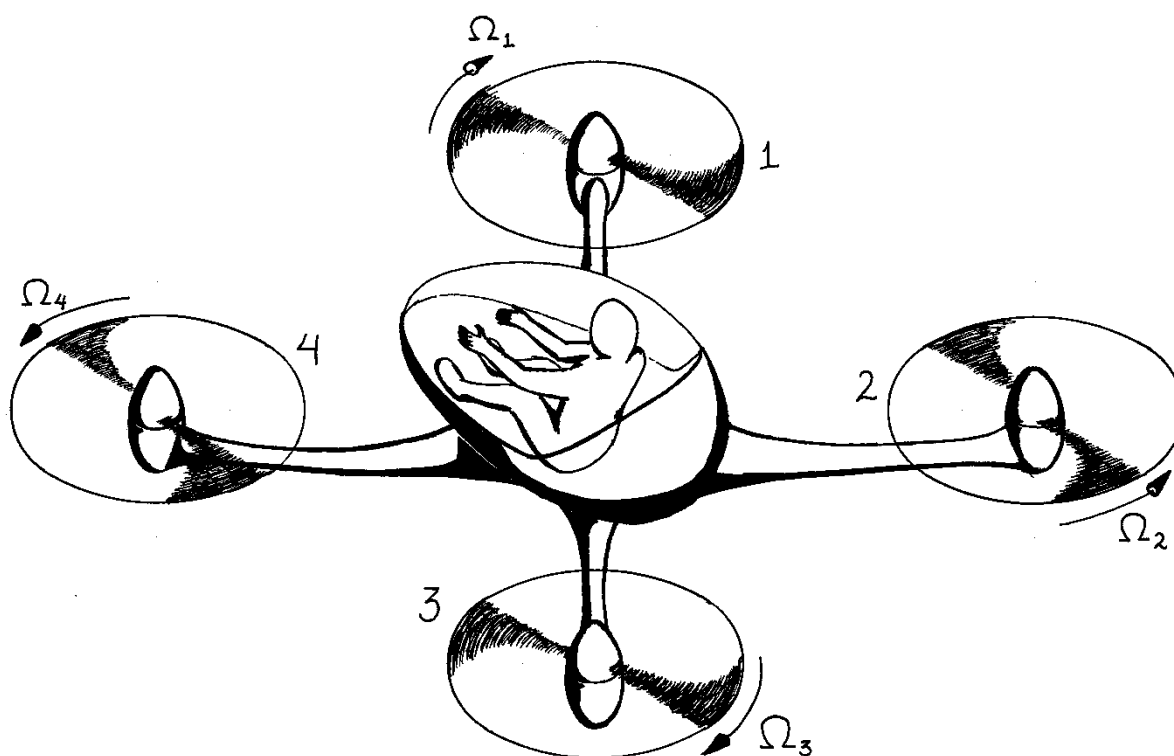


Figura 4.1 – Esquema de rotação dos rotores de um quadricóptero

Através da alteração controlada da rotação de cada rotor é possível modificar a força de sustentação produzindo movimentos diversos. Por exemplo, aumentando ou diminuindo a rotação dos quatro rotores pode-se produzir, respectivamente, o movimento de subida ou descida vertical. Aumentando-se a rotação dos rotores 1 e 2, e diminuindo-se na mesma proporção a rotação dos rotores 3 e 4, produz-se o movimento de rolagem para esquerda resultando em uma translação no mesmo sentido. De forma análoga, pode-se produzir o movimento de rolagem e translação para a direita, ou os movimentos de arfagem para frente ou para trás, seguidos das

respectivas translações. O movimento de guinada é conseguido através da diferença do torque de reação entre o corpo da aeronave e os componentes rotativos do sistema de sustentação e propulsão. Por exemplo, o movimento de guinada para a direita é conseguido aumentando-se a rotação do par de rotores com sentido de rotação para a esquerda e diminuindo-se na mesma proporção a rotação do par com sentido de rotação para a direita. O movimento oposto é obtido analogamente através de uma ação contrária.

Com exceção dos motores e rotores, que ficam localizados nas extremidades da estrutura, os demais componentes eletrônicos como sensores, baterias e unidade de processamento são normalmente posicionados próximos ao centro do corpo da aeronave.

5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Pounds, et al. (2002)

Desenvolveram um quadricóptero com componentes comercialmente disponíveis para servir de plataforma para a condução de ensaios laboratoriais.

O modelo que descreve a dinâmica do corpo da aeronave foi obtido através da aplicação da formulação de Newton-Euler considerando-se os seis graus de liberdade de um corpo rígido no espaço, ou seja, deslocamentos em x , y , z do centro de massa e rotações segundo os ângulos de Euler. As forças consideradas foram o peso próprio da aeronave e as interações dinâmicas entre cada um dos quatro motores e o corpo. Essas interações incluem o empuxo de sustentação, o torque reativo gerado pelo arrasto dos rotores e os momentos giroscópicos resultantes dos sistemas de sustentação e propulsão. As equações obtidas foram então linearizadas em torno do ponto de operação que representa o voo pairado.

Cada um dos quatro sistemas de sustentação e propulsão, formados pelos motores elétricos DC, caixas de redução e rotores, formam sistemas dinâmicos independentes que interagem com o corpo da aeronave através do acoplamento entre o motor e a estrutura. Aqui, o modelo utilizado tomou como grau de liberdade a rotação do motor, tendo sido adotada a aproximação por um sistema de primeira ordem. Este também foi linearizado ao redor do ponto de operação.

O controlador PID empregado visa apenas a adequação da resposta dinâmica do sistema, em particular os movimentos de rolagem e arfagem, para facilitar o seu controle por parte de um piloto (*pilot augmentation control system*). Neste trabalho, não foi implementado um sistema de estabilização automático.

Pounds, Mahony e Gresham (2004)

Desenvolveram um novo protótipo, em substituição ao descrito em Pounds, et al. (2002), onde um modelo mais preciso e uma construção dedicada resultou em um veículo mais versátil, eficiente e robusto que o anterior.

Dentre os aspectos notáveis deste novo protótipo está o desenvolvimento de rotores com perfis otimizados para a aplicação em questão. Isso resultou em uma

melhora significa nas características aerodinâmicas dos rotores, frente às obtidas com os rotores genéricos utilizados no protótipo anterior, tornando-os mais eficientes e melhorando o desempenho esperado da aeronave.

Mais uma vez, o controlador PID empregado visa apenas a adequação da resposta dinâmica do sistema, não tendo sido implementado um sistema de estabilização automático.

Bouabdallah e Siegwart (2005)

Com o intuito de desenvolver e validar duas técnicas de controle não linear (*backstepping* e *sliding-mode*) para a estabilização automática de um quadricóptero, adotaram um modelo dinâmico onde se consideraram os efeitos giroscópicos do corpo da aeronave, bem como dos sistemas de sustentação e propulsão, que incluiu rotores, caixa de redução e motor.

O modelo não linear do corpo da aeronave foi obtido através da formulação de Newton-Euler considerando-se os seis graus de liberdade associados a um corpo rígido no espaço, ou seja, translações em x , y , e z e rotações ϕ , θ , ψ (rolagem, arfagem, guinada).

Considerou-se também a dinâmica dos quatro motores elétricos de corrente contínua tomando-se como graus de liberdade as rotações e as correntes elétricas dos motores, e prosseguindo-se com a linearização em torno do ponto de operação. Foram também incluídas as inércias dos sistemas de redução e dos rotores.

As simulações revelaram que as respostas dos ângulos de rolagem e arfagem assumem um comportamento oscilatório com amplitude crescente em resposta a uma velocidade de rotação inicial em cada uma das respectivas direções, indicando a instabilidade do sistema em malha aberta. Adicionalmente verificou-se a independência das respostas de rolagem e arfagem para o sistema sem controle, corroborando os resultados obtidos empiricamente através do ensaio de protótipos.

6 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

A representação do movimento do corpo do quadricóptero será feita com o auxílio de três sistemas de referência: um sistema fixo à superfície terrestre tomado como inercial (seção 6.1), um sistema móvel solidário ao veículo (seção 6.3) e um sistema auxiliar que acompanha o quadricóptero, porém com orientação definida pela superfície terrestre (seção 6.2).

6.1 Sistema fixo

Será considerado como referencial inercial um sistema coordenado ortogonal positivo $O_E x_E y_E z_E$ fixo à Terra e indicado por Σ_E , de tal forma que O_E corresponderá à origem, posição inicial do voo do quadricóptero nas imediações da superfície terrestre, $O_E x_E$ terá sentido positivo coincidente com o norte geográfico, $O_E y_E$ terá sentido positivo coincidente com o leste geográfico e $O_E z_E$ terá sentido positivo coincidente com o vetor da aceleração gravitacional $\mathbf{g}$.

Embora este sistema a rigor possua componentes de aceleração angular oriundos do movimento do próprio planeta, a sua utilização como referencial inercial no presente estudo se justifica pelo fato de que o quadricóptero se deslocará apenas nas imediações da superfície terrestre, e com velocidades relativamente baixas.

Adicionalmente, será considerado que a superfície terrestre é plana e que a intensidade, direção e sentido do vetor aceleração gravitacional $\mathbf{g}$ mantêm-se constante.

A figura 6.1 ilustra a orientação do sistema Σ_E segundo os pontos cardeais, primeiro sobre uma representação tridimensional da Terra (esquerda) e, em seguida, sobre um plano horizontal (direita). Na representação plana, observa-se o eixo $O_E z_E$ perpendicular ao plano na folha, “entrando” neste, e indicado pelo símbolo $\otimes$.

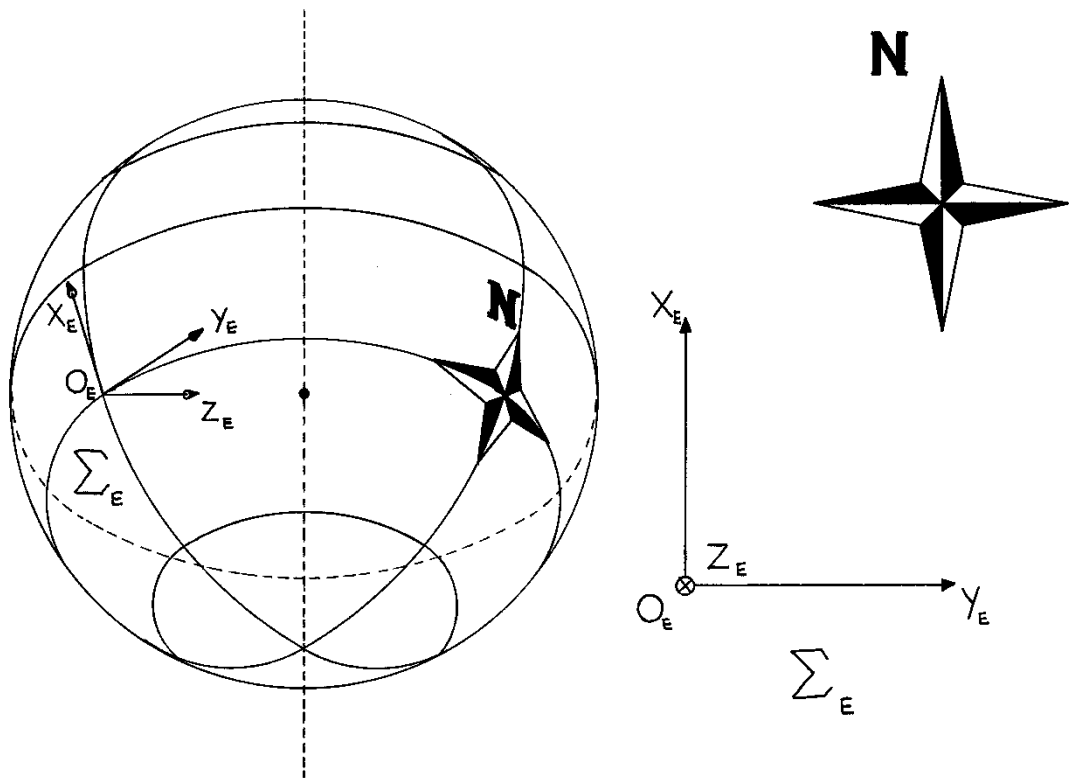


Figura 6.1 – Orientação do sistema Σ_E segundo os pontos cardeais

A adoção de um sistema de referência inercial é necessária, pois na utilização da Segunda Lei de Newton, a relação de proporcionalidade entre as excitações externas, dadas por forças e momentos, e os seus efeitos cinemáticos sobre o corpo, dados por acelerações lineares e angulares, só é válida quando esses efeitos cinemáticos são tomados relativos a um sistema que não possua aceleração própria.

6.2 Sistema auxiliar

Será também considerado um sistema auxiliar coordenado de referência ortogonal positivo $O_V x_V y_V z_V$ indicado por Σ_V . A origem O_V deste sistema será coincidente com o centro de massa G do veículo, e a orientação de seus eixos obedecerá à mesma regra seguida por Σ_E , ou seja, $O_V x_V$ terá sentido positivo coincidente com o norte geográfico, $O_V y_V$ terá sentido positivo coincidente com o leste geográfico e $O_V z_V$ terá sentido positivo coincidente com o vetor da aceleração gravitacional g .

Com base nas convenções para as orientações de Σ_V e Σ_E , bem como nas hipóteses simplificadoras adotadas na seção anterior, tem-se que estes dois sistemas possuirão *sempre* eixos homólogos paralelos.

Todas as trajetórias a serem percorridas pelo quadricóptero serão dadas em termos do deslocamento de O_V relativo a O_E , e descritas por um vetor posição com componentes na base fixa Σ_E . Uma definição precisa do conjunto de coordenadas a serem usadas para a descrição do movimento do quadricóptero será dada mais adiante.

A figura 6.2 ilustra o sistema Σ_V em relação a Σ_E descrevendo uma trajetória qualquer. Note na figura que os eixos O_Vx_V , O_Vy_V e O_Vz_V permanecem *sempre* paralelos aos eixos O_Ex_E , O_Ey_E e O_Ez_E , respectivamente.

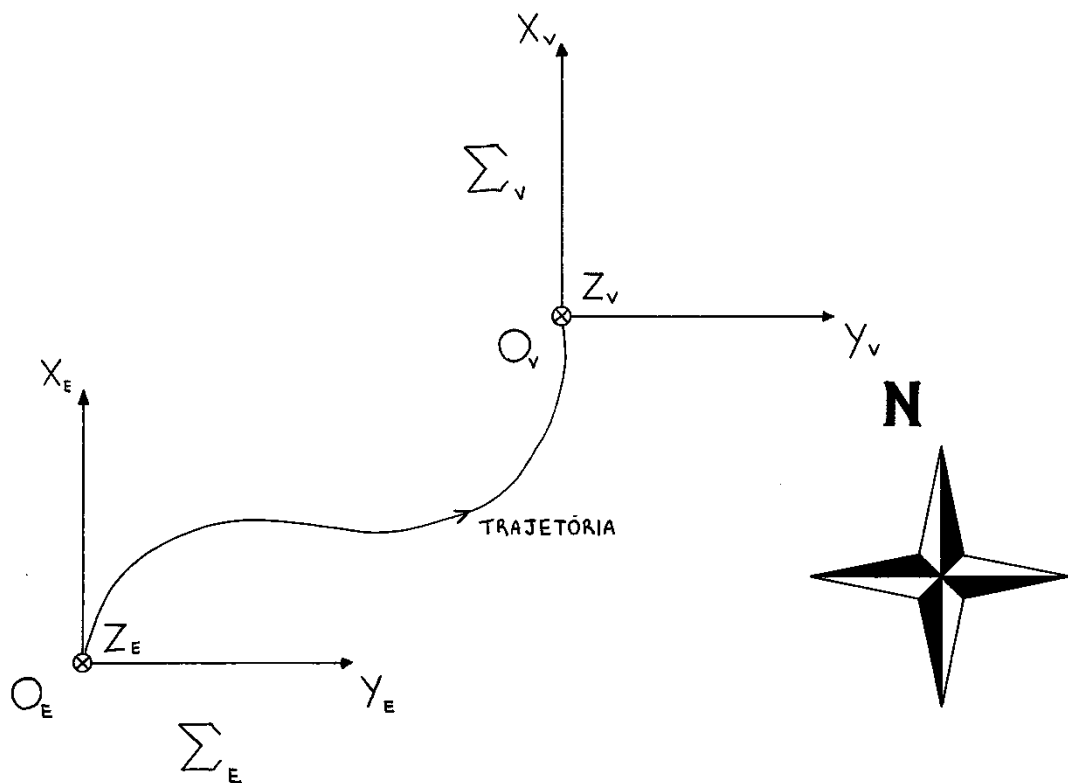


Figura 6.2 – Sistema Σ_V em relação ao sistema Σ_E

6.3 Sistema móvel

Por fim, considera-se o sistema coordenado de referência ortogonal positivo $O_B x_B y_B z_B$ solidário ao quadricóptero e indicado por Σ_B , onde O_B corresponderá à origem, coincidente com o centro de massa G . A orientação do sistema relativo ao veículo pode ser mais facilmente descrita considerando-se um piloto hipotético em seu interior, e definindo-se o sentido dos eixos segundo o seu ponto de vista. Assim, $O_B x_B$ terá sentido positivo apontando para a frente, $O_B y_B$ terá sentido positivo apontando para a direita e $O_B z_B$ terá sentido positivo apontando para baixo.

A orientação escolhida para o sistema Σ_B faz com que os planos $O_B x_B z_B$ e $O_B y_B z_B$ coincidam com os respectivos planos de simetria do quadricóptero, o que futuramente facilitará a descrição da distribuição mássica do veículo em torno do seu centro de massa G .

A figura 6.3 ilustra o sistema Σ_B em relação ao quadricóptero.

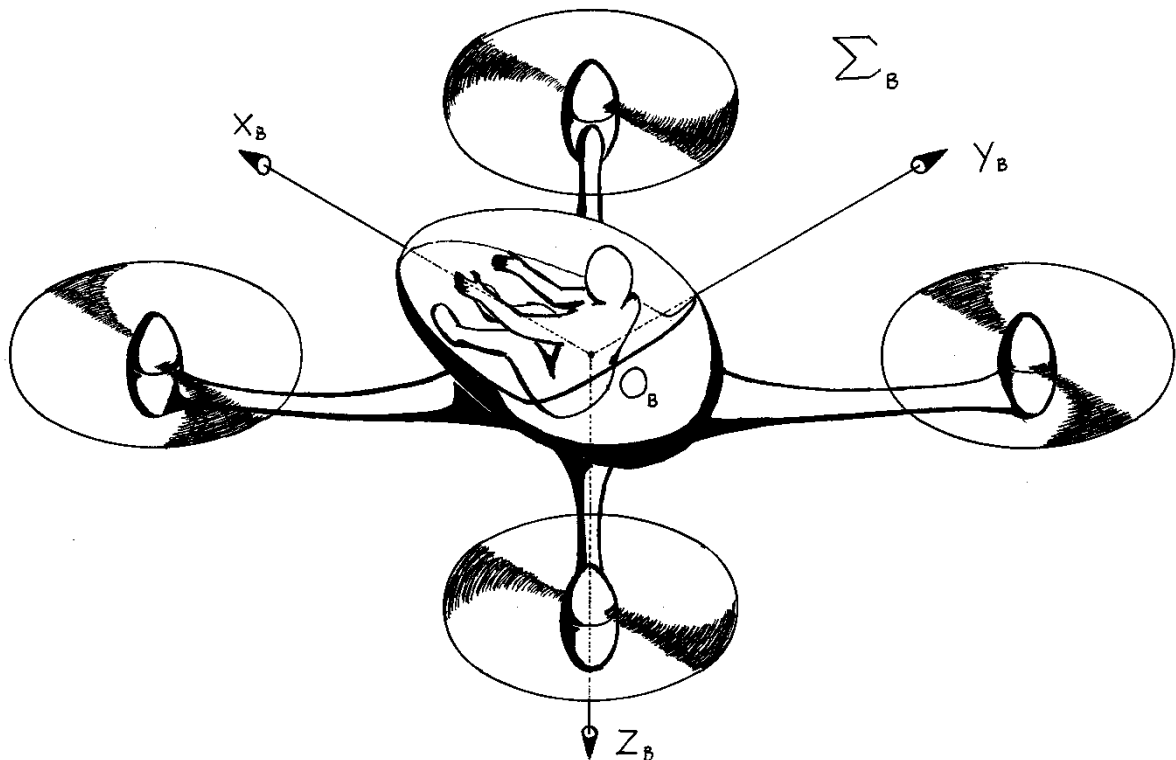


Figura 6.3 – Sistema Σ_B em relação ao quadricóptero

7 DEFINIÇÃO DAS COORDENADAS

Por se tratar de um corpo rígido movimentando-se em um espaço tridimensional, o modelo dinâmico básico do quadricóptero irá requerer um conjunto de doze variáveis de estado, que podem ser divididas em quatro grupos: variáveis de posição, velocidade, posição angular e velocidade angular.

Vale ressaltar que são considerados aqui apenas os componentes fixos em relação ao corpo da aeronave, excluindo-se assim as partes móveis dos motores bem como os rotores. A incorporação dos efeitos das partes móveis sobre o corpo principal do quadricóptero será discutida em momento oportuno.

7.1 Posição

A localização do quadricóptero corresponderá à posição da origem do sistema auxiliar Σ_V , coincidente com o centro de massa G , em relação à origem do sistema fixo Σ_E , dada pelo vetor posição $\mathbf{x}^G = \mathbf{O}_V - \mathbf{O}_E$ descrito com componentes no sistema fixo Σ_E , ou seja,

$$\mathbf{x}_E^G = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}$$

Assim, variações positivas das coordenadas x_E e y_E indicam movimentos nos sentidos norte e leste respectivamente, ao passo que um aumento da sua altitude corresponderá a uma variação negativa da coordenada z_E .

A condição inicial da posição para cada voo será $x_E = y_E = z_E = 0$, a menos que afirme o contrário. Para facilitar a descrição, define-se

$$h_r = h - h_0 = -z_E \quad (7.1)$$

onde h_r é a altitude instantânea do quadricóptero a partir da posição inicial do voo, h é a altitude instantânea do quadricóptero a partir do nível do mar, e h_0 é a altitude da posição inicial do voo a partir do nível do mar.

Conforme ficará evidente no decorrer do trabalho, o vetor posição $\mathbf{x}^G$ é o único a ser descrito com componentes no sistema fixo Σ_E . Essa escolha tem como

objetivo tornar a interpretação da posição mais direta e intuitiva, com um par de coordenadas no plano horizontal x_E e y_E e uma altitude h , bem como facilitar futuras implementações de sistemas de posicionamento por GPS.

7.2 Velocidade

A velocidade do quadricóptero corresponderá à velocidade da origem do sistema auxiliar Σ_V em relação à origem do sistema fixo Σ_E , dada pelo vetor velocidade V^G visto por um observador no sistema fixo Σ_E e descrito com componentes no sistema móvel Σ_B , ou seja,

$$V_B^G = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

7.3 Posição angular

A posição angular do quadricóptero corresponderá à orientação do sistema móvel Σ_B em relação ao sistema auxiliar Σ_V , dada pelo vetor posição angular $\boldsymbol{\varphi}$ descrito com componentes no sistema móvel Σ_B , ou seja,

$$\boldsymbol{\varphi}_B = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

Cada uma das componentes ϕ , θ e ψ , corresponde a uma rotação positiva ao redor dos eixos $O_B x_B$, $O_B y_B$ e $O_B z_B$, respectivamente, e serão nulos quando a orientação de Σ_B coincidir com a de Σ_V . Na literatura aeronáutica, os ângulos ϕ , θ e ψ são tradicionalmente denominados, respectivamente, ângulos de *rolagem*, *arfagem* e *guinada*, e o seu conjunto como ângulos de Euler (COOK, 2013).

Para que se possa definir a orientação de um sistema em relação a outro qualquer, utilizando-se três coordenadas angulares, é necessário estabelecer uma sequência para os ângulos, uma vez que a composição de deslocamentos angulares em direções distintas não é comutativa.

Esse fato pode ser claramente observado na figura 7.1, onde a partir de uma mesma orientação inicial, o sistema $Oxyz$ é levado para orientações distintas em

cada uma das seis possíveis seqüências de rotações. Embora no exemplo tenham sido impostas rotações de 90° , é evidente que qualquer ângulo α , tal que $k < \alpha < 180^\circ.k$, ($k \in \mathbb{Z}$), teria levado cada um dos exemplos a orientações distintas. Ou ainda, uma determinada orientação poderia ter sido conseguida por até seis conjuntos de rotações ϕ , θ e ψ diferentes, contanto que a ordem da composição e os valores de cada ângulo fossem convenientemente alterados.

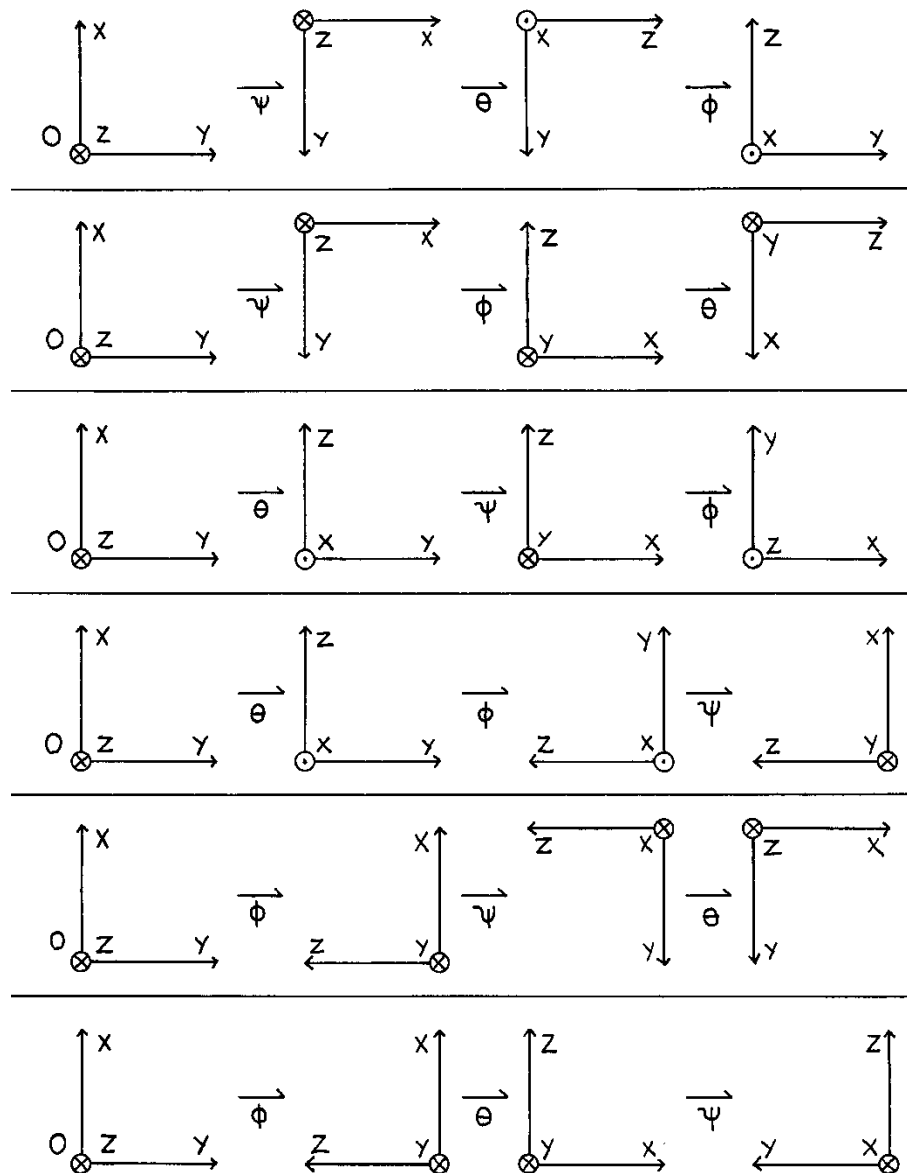


Figura 7.1 – Exemplo da não comutatividade da composição de deslocamentos angulares em direções distintas

Assim, neste estudo será utilizada a sequência tradicionalmente empregada na literatura de dinâmica de voo (COOK, 2013), onde a partir da orientação do sistema Σ_V alcança-se a orientação de Σ_B através da sequência $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$, conforme ilustra a figura 7.2. Observe que esta é a generalização da primeira sequência ilustrada na figura 7.1.

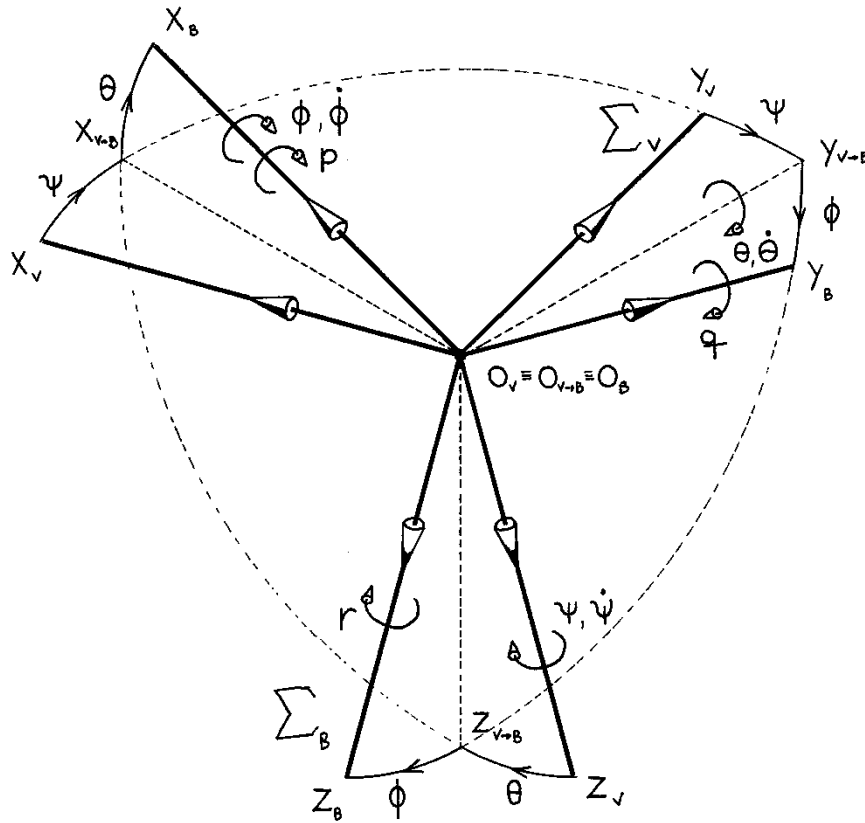


Figura 7.2 – Orientação de Σ_B em relação a Σ_V

Na figura 7.2 observa-se claramente a seguinte sequência:

- 1) Rotação de ψ em torno de $O_V Z_V$, fazendo com que a partir dos eixos $O_V x_V$ e $O_V y_V$ alcancem-se os eixos $O_{V \rightarrow B} x_{V \rightarrow B}$ e $O_{V \rightarrow B} y_{V \rightarrow B}$, respectivamente;
- 2) Rotação de θ em torno de $O_{V \rightarrow B} y_{V \rightarrow B}$, fazendo com que a partir dos eixos $O_{V \rightarrow B} x_{V \rightarrow B}$ e $O_V z_V$ alcancem-se os eixos $O_B x_B$ e $O_{V \rightarrow B} z_{V \rightarrow B}$, respectivamente;
- 3) Rotação de ϕ em torno de $O_B x_B$, fazendo com que a partir dos eixos $O_{V \rightarrow B} y_{V \rightarrow B}$ e $O_{V \rightarrow B} z_{V \rightarrow B}$ alcancem-se os eixos $O_B y_B$ e $O_B z_B$, respectivamente.

Dada a natureza operacional do veículo a ser desenvolvido, cuja orientação permanece sempre próxima da horizontal, os módulos dos ângulos ϕ e θ ficarão naturalmente limitados para valores menores que 90° , o que por si só elimina a preocupação com a possibilidade de *Gimbal Lock*. Quanto ao ângulo ψ , não é necessário definir um limite no intervalo de operação.

Por fim, define-se a taxa de variação temporal $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ da posição angular por

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_B = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

7.4 Velocidade angular

A velocidade angular do quadricóptero corresponderá à velocidade angular do sistema móvel Σ_B em relação ao sistema auxiliar Σ_V , dada pelo vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ visto por um observador no sistema fixo Σ_E e descrito com componentes no sistema móvel Σ_B , ou seja,

$$\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Na figura 7.2 apresentada anteriormente, é possível observar os componentes p , q e r sobre os eixos do sistema Σ_B .

8 VETORES E SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Dada a utilização de sistemas de referência com naturezas e orientações distintas, e de grandezas vetoriais que precisarão ser avaliadas em mais de um sistema, torna-se necessária a obtenção de expressões para a transformação de vetores de um sistema para outro, bem como para o cômputo de suas derivadas nesses sistemas.

8.1 Transformação de grandezas vetoriais lineares

Considere o vetor posição x^G descrito na seção 7.1. Um problema prático no presente trabalho será a transformação desse vetor de uma representação com componentes no sistema fixo Σ_E , conforme foi definido, para uma representação com componentes no sistema móvel Σ_B , de forma a permitir a sua inserção nas equações de movimento do quadricóptero, onde todas as demais variáveis estarão também representadas no sistema Σ_B .

8.1.1 Transformação entre os sistemas Σ_V e Σ_B

Considerando-se x_V , y_V , z_V , $x_{V \rightarrow B}$, $y_{V \rightarrow B}$, $z_{V \rightarrow B}$, x_B , y_B e z_B como sendo as componentes do vetor x^G sobre cada um dos respectivos eixos, pode-se obter, a partir da figura 7.2, as representações individuais de cada uma das rotações ψ , θ e ϕ , mostradas na figura 8.1.

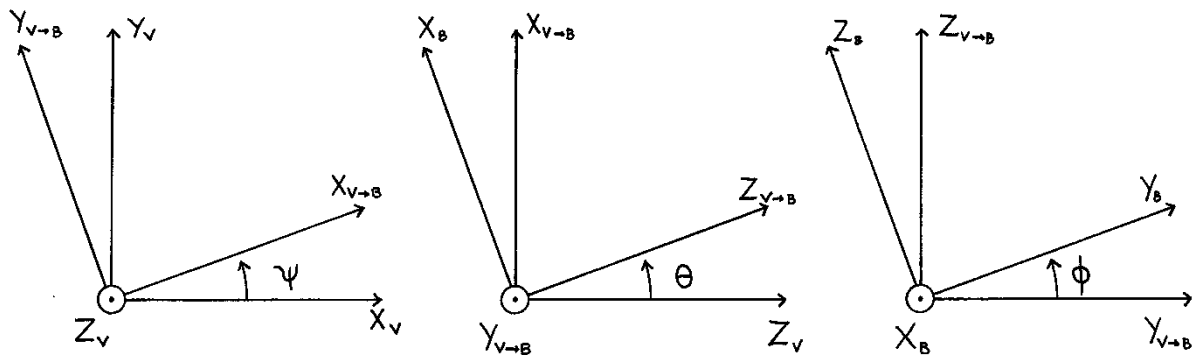


Figura 8.1 – Representações individuais das rotações ψ (esquerda), θ (centro) e ϕ (direita)

O equacionamento de cada rotação é dado por

$$\begin{aligned}
 x_{V \rightarrow B} &= c\psi \cdot x_V + s\psi \cdot y_V \\
 y_{V \rightarrow B} &= -s\psi \cdot x_V + c\psi \cdot y_V \\
 z_V &= z_V \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} x_{V \rightarrow B} \\ y_{V \rightarrow B} \\ z_V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_B &= c\theta \cdot x_{V \rightarrow B} - s\theta \cdot z_V \\
 y_{V \rightarrow B} &= y_{V \rightarrow B} \\
 z_{V \rightarrow B} &= s\theta \cdot x_{V \rightarrow B} + c\theta \cdot z_V \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} x_B \\ y_{V \rightarrow B} \\ z_{V \rightarrow B} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{V \rightarrow B} \\ y_{V \rightarrow B} \\ z_V \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_B &= x_B \\
 y_B &= c\phi \cdot y_{V \rightarrow B} + s\phi \cdot z_{V \rightarrow B} \\
 z_B &= -s\phi \cdot y_{V \rightarrow B} + c\phi \cdot z_{V \rightarrow B} \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_{V \rightarrow B} \\ z_{V \rightarrow B} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

onde $c\#$ e $s\#$ indicam, respectivamente, cosseno e seno do ângulo em questão.

Combinando-se as expressões anteriores, obtém-se a relação desejada

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{bmatrix} \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta & c\phi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta & -s\phi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{bmatrix} \\
 \rightarrow \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}_B^G = \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G \quad (8.1)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_V^G &= \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}_B^G &= \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_{BV} &= \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (8.2)
\end{aligned}$$

Assim, com a expressão 8.1, pode-se obter as componentes vetor posição $\mathbf{x}^G$ no sistema Σ_B a partir das componentes desse vetor no sistema Σ_V .

É importante ressaltar que, embora a dedução anterior tenha sido realizada em torno do vetor $\mathbf{x}^G$, a matriz $\mathbf{L}_{BV}$, denominada Matriz de Cossenos Diretores (COOK, 2013), permite a transformação de qualquer vetor do sistema Σ_V para o sistema Σ_B .

A transformação inversa é obtida fazendo-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_B^G &= \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G \\
\rightarrow \mathbf{L}_{BV}^{-1} \cdot \mathbf{x}_B^G &= \mathbf{L}_{BV}^{-1} \cdot \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G \\
\rightarrow \mathbf{L}_{BV}^{-1} \cdot \mathbf{x}_B^G &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_V^G \\
\rightarrow \mathbf{x}_V^G &= \mathbf{L}_{BV}^{-1} \cdot \mathbf{x}_B^G \\
\rightarrow \mathbf{x}_V^G &= \mathbf{L}_{VB} \cdot \mathbf{x}_B^G \quad (8.3)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{L}_{VB} = \mathbf{L}_{BV}^{-1} = \mathbf{L}_{BV}^T \quad (8.4)$$

A igualdade 8.4 pode ser comprovada de, pelo menos, três maneiras:

1. Deduzindo-se a expressão 8.3 a partir das representações da figura 8.1, de forma análoga à dedução da equação 8.1;
2. Calculando-se a inversa de $\mathbf{L}_{BV}$ e comparando o resultado com a sua transposta;
3. Notando-se que as normas de $\mathbf{x}_V^G$ e $\mathbf{x}_B^G$ são iguais, uma vez que representam o mesmo vetor, e fazendo

$$\|\mathbf{x}_B^G\|^2 = \mathbf{x}_B^{G^T} \cdot \mathbf{x}_B^G = (\mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G)^T \cdot \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G = \mathbf{x}_V^{G^T} \cdot \mathbf{L}_{BV}^T \cdot \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G = \mathbf{x}_V^{G^T} \cdot \mathbf{x}_V^G = \|\mathbf{x}_V^G\|^2$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \mathbf{L}_{BV}^T \cdot \mathbf{L}_{BV} &= \mathbf{I} \\ \rightarrow \mathbf{L}_{BV}^T &= \mathbf{L}_{BV}^{-1}\end{aligned}$$

A igualdade do tipo $\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{I}$ é denominada condição de ortogonalidade e indica que a matriz $\mathbf{L}$ é ortogonal. Resulta dessa propriedade que o determinante de $\mathbf{L}$ é sempre diferente de *zero* e que a inversa de $\mathbf{L}$ sempre existe (ETKIN, 2005).

8.1.2 Transformação entre os sistemas Σ_E e Σ_V

Lembrando-se que estes sistemas possuem a mesma orientação (vide definições e hipóteses simplificadoras na seção 6.1 e 6.2), a relação entre as componentes do vetor $\mathbf{x}^G$ sobre Σ_E e Σ_V acaba sendo dada por

$$\mathbf{x}_V^G = \mathbf{L}_{VE} \cdot \mathbf{x}_E^G \quad (8.5)$$

onde

$$\mathbf{L}_{VE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Em outras palavras, as componentes de $\mathbf{x}^G$ sobre Σ_E e Σ_V são iguais.

8.1.3 Transformação entre os sistemas Σ_E e Σ_B

A expressão que relaciona as componentes do vetor $\mathbf{x}^G$ nos sistemas Σ_E e Σ_B pode ser obtida através da combinação das expressões 8.1 e 8.5

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_B^G &= \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{x}_V^G \\ \rightarrow \mathbf{x}_B^G &= \mathbf{L}_{BV} \cdot \mathbf{L}_{VE} \cdot \mathbf{x}_E^G \\ \rightarrow \mathbf{x}_B^G &= \mathbf{L}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G\end{aligned} \quad (8.7)$$

onde

$$\mathbf{L}_{BE} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Naturalmente, a transformação inversa será dada por

$$\mathbf{x}_E^G = \mathbf{L}_{EB} \cdot \mathbf{x}_B^G \quad (8.9)$$

onde

$$\mathbf{L}_{EB} = \mathbf{L}_{BE}^{-1} = \mathbf{L}_{BE}^T \quad (8.10)$$

8.2 Transformação de derivadas de vetores

Considere novamente o vetor posição $\mathbf{x}$ e a expressão 8.7

$$\mathbf{x}_B^G = \mathbf{L}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G$$

As derivadas dos vetores $\mathbf{x}_B^G$ e $\mathbf{x}_E^G$ são dadas por

$$\dot{\mathbf{x}}_B^G = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_E^G = \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix}$$

Embora os vetores $\mathbf{x}_B^G$ e $\mathbf{x}_E^G$ representem um mesmo vetor descrito com componentes em referenciais diferentes, $\dot{\mathbf{x}}_B^G$ e $\dot{\mathbf{x}}_E^G$ não possuem essa mesma relação. Na realidade, esses são vetores diferentes descritos com componentes em referenciais diferentes. Para melhor ilustrar esse fato, são listados a seguir os quatro casos envolvendo o vetor velocidade e os referenciais Σ_E e Σ_B :

- Velocidade vista por um observador em Σ_E e descrita com componentes em Σ_E (Caso de $\mathbf{V}_E^G = \dot{\mathbf{x}}_E^G$);
- Velocidade vista por um observador em Σ_E e descrita com componentes em Σ_B (Caso de $\mathbf{V}_B^G = \mathbf{L}_{BE} \cdot \mathbf{V}_E^G = \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G$, definido na seção 7.2);
- Velocidade vista por um observador em Σ_B e descrita com componentes em Σ_E (Caso de $\mathbf{L}_{EB} \cdot \dot{\mathbf{x}}_B^G$);
- Velocidade vista por um observador em Σ_B e descrita com componentes em Σ_B (Caso de $\dot{\mathbf{x}}_B^G$).

O motivo para a existência dessas diferenças é o fato de que o referencial Σ_B possui velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em relação a Σ_E , o que faz com que a matriz $\mathbf{L}_{BE}$ varie com o tempo.

Diante desse quadro, o propósito desta seção é a obtenção de uma expressão que permita determinar a derivada de um vetor visto por um observador em Σ_E e descrita com componentes em Σ_B , a partir desse mesmo vetor e de sua derivada, vistos por um observador em Σ_B e descritos com componentes em Σ_B .

Para tanto, começa-se derivando a expressão 8.9

$$\dot{\mathbf{x}}_E^G = \dot{\mathbf{L}}_{EB} \cdot \mathbf{x}_B^G + \mathbf{L}_{EB} \cdot \dot{\mathbf{x}}_B^G \quad (8.11)$$

Uma vez que a matriz $\mathbf{L}_{EB}$ independe do vetor $\mathbf{x}_B^G$, o valor de $\dot{\mathbf{L}}_{EB}$ pode ser mais facilmente obtido, considerando-se o caso particular para o qual $\mathbf{x}_B$ é constante (ETKIN, 2005). Assim,

$$\dot{\mathbf{x}}_E^G = \dot{\mathbf{L}}_{EB} \cdot \mathbf{x}_B^G \quad (8.12)$$

Adicionalmente, ainda para $\mathbf{x}_B^G$ constante, tem-se que

$$\dot{\mathbf{x}}_E^G = \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{x}_E^G$$

Para facilitar o desenvolvimento subsequente, propõe-se a substituição do operador produto vetorial $\times$ pelo seguinte produto matricial

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_E^G = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E \cdot \mathbf{x}_E^G \quad (8.13)$$

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_E = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_E} & \omega_{y_E} \\ \omega_{z_E} & 0 & -\omega_{x_E} \\ -\omega_{y_E} & \omega_{x_E} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

é uma matriz antissimétrica. Para matrizes desse tipo é válida a relação $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}$.

De 8.12 e 8.13 obtém-se então que

$$\dot{\mathbf{L}}_{EB} \cdot \mathbf{x}_B^G = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E \cdot \mathbf{x}_E^G$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \dot{\mathbf{L}}_{EB} \cdot \mathbf{x}_B^G &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E \cdot \mathbf{L}_{EB} \cdot \mathbf{x}_B^G \\
\rightarrow \dot{\mathbf{L}}_{EB} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E \cdot \mathbf{L}_{EB}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

É necessário agora obter a expressão equivalente a 8.15, porém relacionando $\dot{\mathbf{L}}_{BE}$, $\mathbf{L}_{BE}$ e $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$. Para tanto, utiliza-se o artifício de considerar o sistema Σ_B como sendo o fixo e Σ_E como o móvel (naturalmente esta situação não ocorre na prática), possuindo velocidade angular $-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B$ (ETKIN, 2005). Assim, procedendo-se de forma análoga à anterior, obtêm-se

$$\dot{\mathbf{x}}_B^G = \dot{\mathbf{L}}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G \tag{8.16}$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_B^G = \dot{\mathbf{L}}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G \tag{8.17}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_B^G = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{x}_B^G \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{x}_B^G \\
\rightarrow \dot{\mathbf{L}}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{L}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G \\
\rightarrow \dot{\mathbf{L}}_{BE} &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{L}_{BE}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

De posse de 8.15 e 8.19, bem como da propriedade para matrizes antissimétricas, pode-se fazer

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}}_{BE} &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{L}_{BE} \\
\rightarrow (\dot{\mathbf{L}}_{BE})^T &= (-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{L}_{BE})^T \\
\rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{BE}^T) &= -\mathbf{L}_{BE}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^T \\
\rightarrow \dot{\mathbf{L}}_{EB} &= \mathbf{L}_{EB} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \\
\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E \cdot \mathbf{L}_{EB} &= \mathbf{L}_{EB} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \\
\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E \cdot \mathbf{L}_{EB} \cdot \mathbf{L}_{EB}^T &= \mathbf{L}_{EB} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{L}_{EB}^T \\
\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}}_E &= \mathbf{L}_{EB} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{L}_{BE}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Finalmente, obtêm-se a forma desejada

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_B^G &= \dot{\mathbf{L}}_{BE} \cdot \mathbf{x}_E^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G \\
\rightarrow \dot{\mathbf{x}}_B^G &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{x}_B^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G \\
\rightarrow \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G &= \dot{\mathbf{x}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{x}_B^G
\end{aligned} \tag{8.22}$$

É importante ressaltar que, embora a dedução anterior tenha sido realizada em torno do vetor $\mathbf{x}^G$, a expressão 8.22 é geral, podendo ser utilizada com qualquer vetor $\mathbf{v}$ representado nos referenciais fixos e móveis. Assim,

Derivada de $\mathbf{v}$, visto por um observador na base fixa e descrita com componentes na base móvel	=	Derivada de $\mathbf{v}$, visto por um observador na base móvel e descrita com componentes na base móvel	+	Velocidade angular da base móvel, vista por um observador na base fixa e descrita com componentes na base móvel	×	Vetor $\mathbf{v}$ descrito com componentes na base móvel
--	---	---	---	---	---	---

ou ainda

$$\mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{v}}_E = \dot{\mathbf{v}}_B + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{v}_B \tag{8.23}$$

9 RELAÇÕES CINEMÁTICAS

9.1 Velocidade

Considere o ponto P mostrado na figura 9.1. Deseja-se determinar a velocidade do ponto P vista por um observador no sistema fixo Σ_E e descrita com componentes no sistema móvel Σ_B , em função dos vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{r}$, de suas respectivas derivadas temporais, e do vetor rotação $\boldsymbol{\omega}$ do sistema móvel em relação ao fixo.

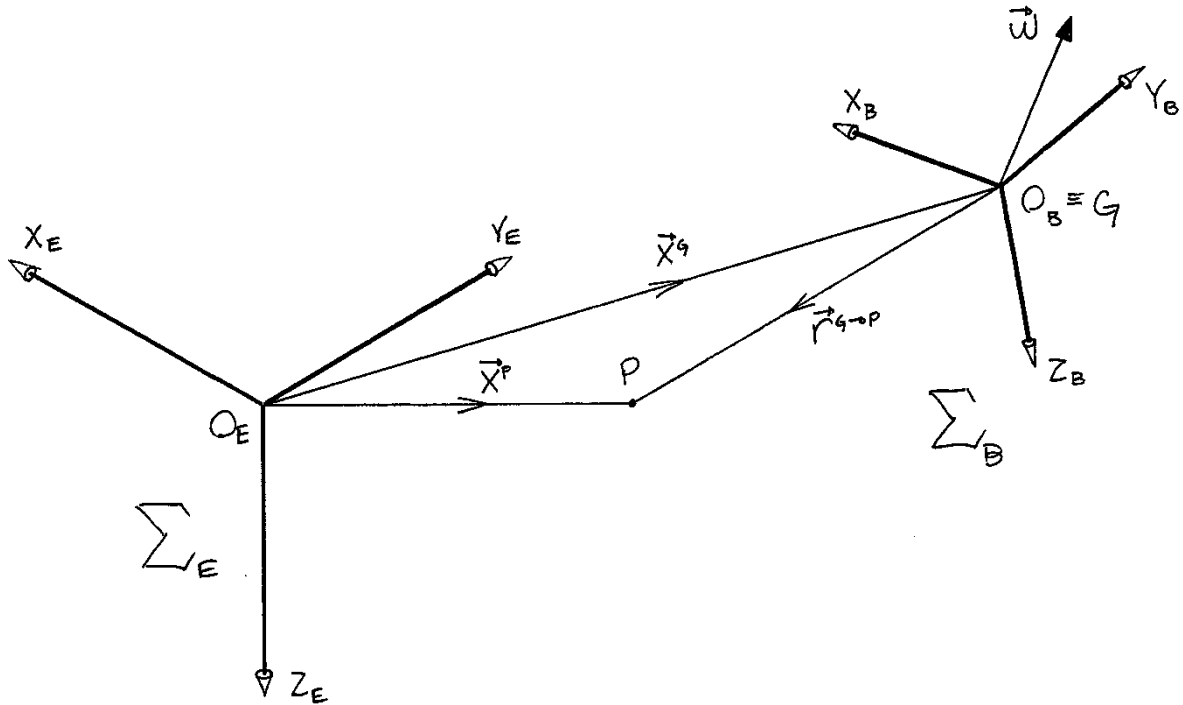


Figura 9.1 – Representação de um ponto qualquer P segundo os referenciais Σ_E e Σ_B

Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_E^P &= \mathbf{x}_E^G + \mathbf{r}_E^{G \rightarrow P} \\
 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_E^P &= \dot{\mathbf{x}}_E^G + \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P} \\
 \rightarrow \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^P &= \mathbf{L}_{BE} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_E^G + \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P}) \\
 \rightarrow \mathbf{V}_B^P &= \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P} \\
 \rightarrow \mathbf{V}_B^P &= \mathbf{V}_B^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P}
 \end{aligned}$$

e com o auxílio da expressão 8.23, obtém-se a relação desejada,

$$\rightarrow \mathbf{V}_B^P = \mathbf{V}_B^G + \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} \quad (9.1)$$

Uma vez que $\mathbf{V}_B^P$ corresponde a uma velocidade vista por um observador em um referencial inercial, independentemente da natureza do referencial sobre o qual seu vetor está decomposto, pode-se dizer que esta é uma velocidade absoluta. Assim, o termo $\dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P}$ corresponde à velocidade relativa, ao passo que o termo $\mathbf{V}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P}$ corresponde à velocidade de arrastamento (FRANÇA, 2011).

9.2 Aceleração

A determinação da aceleração do ponto P , visto por um observador no sistema fixo Σ_E e descrito com componentes no sistema móvel Σ_B , segue a mesma metodologia utilizada na seção anterior para a determinação da sua velocidade.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_E^P &= \mathbf{x}_E^G + \mathbf{r}_E^{G \rightarrow P} \\ \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_E^P &= \dot{\mathbf{x}}_E^G + \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P} \\ \rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_E^P &= \ddot{\mathbf{x}}_E^G + \ddot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P} \\ \rightarrow \mathbf{L}_{BE} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_E^P &= \mathbf{L}_{BE} \cdot (\ddot{\mathbf{x}}_E^G + \ddot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P}) \\ \rightarrow \mathbf{a}_B^P &= \mathbf{L}_{BE} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}}_E^G + \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P}) \\ \rightarrow \mathbf{a}_B^P &= \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{BE} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_E^G + \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P})) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot (\mathbf{L}_{BE} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_E^G + \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P})) \\ \rightarrow \mathbf{a}_B^P &= \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot (\mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{x}}_E^G + \mathbf{L}_{BE} \cdot \dot{\mathbf{r}}_E^{G \rightarrow P}) \\ \rightarrow \mathbf{a}_B^P &= \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_B^G + \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot (\mathbf{V}_B^G + \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P}) \\ \rightarrow \mathbf{a}_B^P &= \dot{\mathbf{V}}_B^G + \ddot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \frac{d}{dt} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{V}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} \\ \rightarrow \mathbf{a}_B^P &= \dot{\mathbf{V}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{V}_B^G + \ddot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \frac{d}{dt} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} \\ &\quad + 2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Um comentário análogo ao que foi feito ao cabo da seção anterior vale aqui, isto é, uma vez que $\mathbf{a}_B^P$ corresponde a uma aceleração vista por um observador em

um referencial inercial, pode-se dizer que esta é uma aceleração absoluta. Assim, o termo $\ddot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P}$ corresponde à aceleração relativa, o termo $\dot{\mathbf{V}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{V}_B^G + \frac{d}{dt}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P}$ corresponde a aceleração de arrastamento, e o termo $2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P}$ é a aceleração de Coriolis (FRANÇA, 2011).

9.3 Relação entre $\dot{\boldsymbol{\phi}}_B$ e $\boldsymbol{\omega}_B$

Uma transformação que também precisa ser determinada é a que relaciona a taxa de variação temporal $\dot{\boldsymbol{\phi}}_B$ da posição angular com o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_B$.

Por inspeção direta da figura 7.2 obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - s\theta \cdot \dot{\psi} \\ q &= c\phi \cdot \dot{\theta} + s\phi \cdot c\theta \cdot \dot{\psi} \\ r &= -s\phi \cdot \dot{\theta} + c\phi \cdot c\theta \cdot \dot{\psi} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi \cdot c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_B = \mathbf{E} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_B \quad (9.3)$$

onde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi \cdot c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

É importante ressaltar que a matriz $\mathbf{E}$, ao contrario do que foi observado para as matrizes $\mathbf{L}$ determinadas anteriormente, não é ortogonal. Assim, a equação inversa à 9.3 fica dada por

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_B = \mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_B \quad (9.5)$$

onde

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi \cdot \tan \theta & c\phi \cdot \tan \theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi \cdot \sec \theta & c\phi \cdot \sec \theta \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

10 RELAÇÕES DINÂMICAS

10.1 Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento linear

Considere o corpo rígido de massa constante m , mostrado na figura 10.1, solidário ao sistema móvel Σ_B , de tal forma que a origem O_B desse sistema coincida com o centro de massa G do corpo. Os vetores posição da origem de Σ_B e do ponto P_i , em relação ao sistema fixo (inercial) Σ_E , são dados por, respectivamente, $\mathbf{x}^G$ e $\mathbf{x}^{P_i}$, e o vetor posição de P_i em relação a Σ_B é dado por $\mathbf{r}^{G \rightarrow P_i}$.

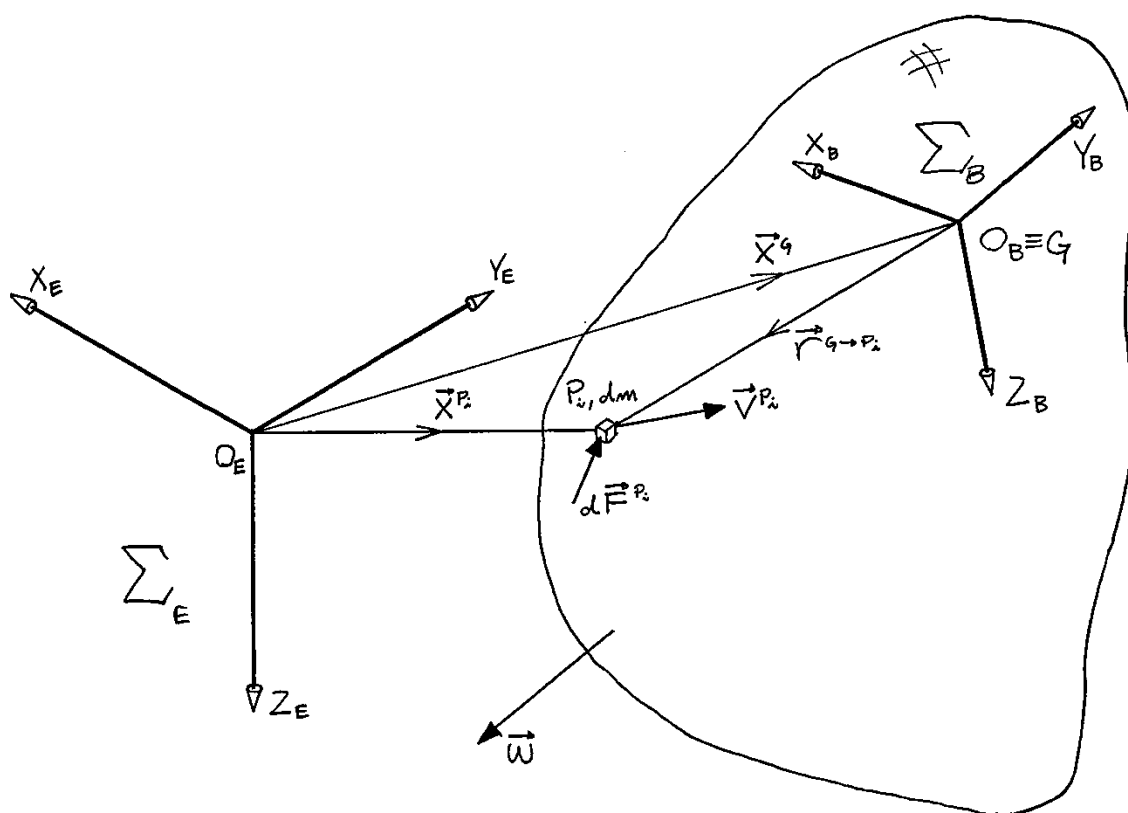


Figura 10.1 – Corpo rígido de massa constante m segundo os sistemas Σ_E e Σ_B

Centrada no ponto P_i , que possui velocidade absoluta instantânea igual $\mathbf{V}^{P_i}$, é tomada a região infinitesimal de massa dm , sobre a qual a resultante de forças internas e externas atuantes é $d\mathbf{F}^{P_i}$.

Assim, da aplicação da Segunda Lei de Newton sobre dm , obtém-se que

$$\dot{\mathbf{V}}_E^{P_i} \cdot dm = d\mathbf{F}_E^{P_i} \quad (10.1)$$

que integrado sobre todo o corpo resulta em

$$\begin{aligned}\rightarrow \int \dot{\mathbf{v}}_E^{P_i} \cdot dm &= \int d\mathbf{F}_E^{P_i} \\ \rightarrow \int \dot{\mathbf{v}}_E^{P_i} \cdot dm &= \mathbf{F}_E\end{aligned}\quad (10.2)$$

Embora a resultante infinitesimal $d\mathbf{F}_E^{P_i}$ atuante sobre dm inclua tanto forças externas quanto internas, ao ser integrada sobre todo o corpo, a resultante global $\mathbf{F}$ representa apenas as forças externas. Isso se deve ao fato de que durante o processo de integração, pela Terceira Lei de Newton, os pares de ação e reação referentes às forças internas entre cada massa infinitesimal se anulam, desaparecendo assim do resultado global.

Uma vez que a origem do sistema móvel se encontra sobre o centro de massa do corpo, pode-se utilizar a definição de baricentro da seguinte forma:

$$\begin{aligned}m \cdot \mathbf{x}_E^G &= \int \mathbf{x}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow m \cdot \mathbf{v}_E^G &= \int \mathbf{v}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow m \cdot \mathbf{a}_E^G &= \int \dot{\mathbf{v}}_E^{P_i} \cdot dm\end{aligned}\quad (10.3)$$

Substituindo-se o resultado da expressão 10.2 na expressão 10.3, obtém-se a relação entre a aceleração do centro de massa G do corpo e a resultante das forças externas $\mathbf{F}_E$

$$m \cdot \mathbf{a}_E^G = \mathbf{F}_E \quad (10.4)$$

que pode ser facilmente transferida para a representação no sistema móvel Σ_B

$$\begin{aligned}\rightarrow \mathbf{L}_{BE} \cdot (m \cdot \mathbf{a}_E^G) &= \mathbf{L}_{BE} \cdot \mathbf{F}_E \\ \rightarrow m \cdot \mathbf{a}_B^G &= \mathbf{F}_B\end{aligned}\quad (10.5)$$

Vale ressaltar que a força $\mathbf{F}$ não é uma força real, mas apenas uma idealização, ou seja, uma força fictícia que poderia ser aplicada sobre o corpo em substituição às forças reais e causar a mesma aceleração $\mathbf{a}^G$ no centro de massa. Observe que não foi especificado o ponto de aplicação de $\mathbf{F}$. Isso se deve ao fato de que aceleração $\mathbf{a}^G$ do centro de massa será a mesma, independentemente do seu ponto de aplicação. Evidentemente, o efeito sobre a aceleração angular do corpo varia de acordo com a posição da linha de ação de $\mathbf{F}$, tópico da próxima seção.

10.2 Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento angular

Considere novamente o corpo rígido de massa constante m da seção anterior. Além dos sistemas Σ_E e Σ_B descritos anteriormente, considere também o sistema de referência Σ_Q solidário ao corpo, com origem O_Q sobre um ponto C qualquer do corpo, conforme ilustra a figura 10.2. O vetor posição da origem de Σ_Q em relação ao sistema fixo (inercial) Σ_E é dado por $\mathbf{x}^C$, o vetor posição de P_i em relação a Σ_Q é dado por $\mathbf{r}^{C \rightarrow P_i}$, e o vetor posição da origem de Σ_B em relação a Σ_Q é dado por $\mathbf{R}^{C \rightarrow G}$.

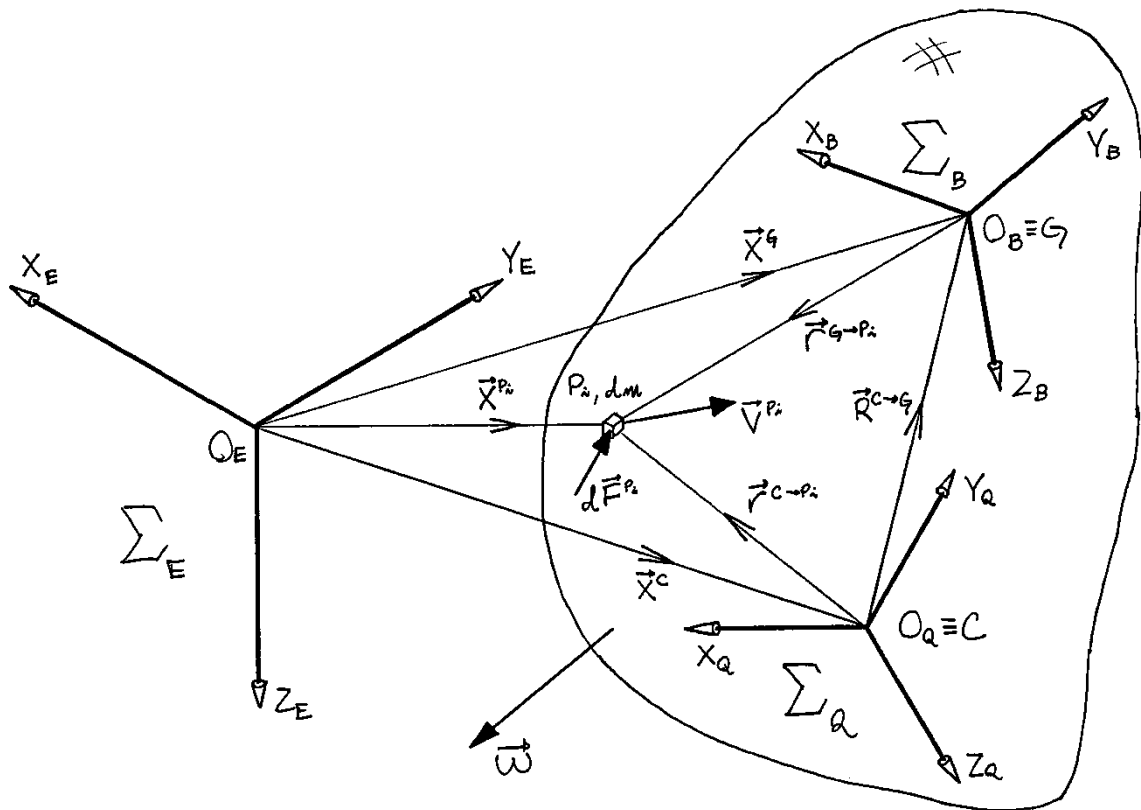


Figura 10.2 – Corpo rígido de massa constante m segundo os sistemas Σ_E , Σ_B e Σ_Q

Aplicando-se a definição de Momento Angular à massa dm , tomando como polo o ponto C , obtém-se

$$d\mathbf{H}_E^C = \mathbf{r}_E^{C \rightarrow P_i} \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \quad (10.6)$$

que quando derivado em relação ao tempo resulta em

$$\begin{aligned} \rightarrow d\dot{\mathbf{H}}_E^C &= \mathbf{r}_E^{C \rightarrow P_i} \times \dot{\mathbf{V}}_E^{P_i} \cdot dm + \dot{\mathbf{r}}_E^{C \rightarrow P_i} \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow d\dot{\mathbf{H}}_E^C &= \mathbf{r}_E^{C \rightarrow P_i} \times d\mathbf{F}_E^{P_i} + (\dot{\mathbf{x}}_E^{P_i} - \dot{\mathbf{x}}_E^C) \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow d\dot{\mathbf{H}}_E^C &= d\mathbf{M}_E^C + \mathbf{V}_E^{P_i} \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm - \mathbf{V}_E^C \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow d\dot{\mathbf{H}}_E^C &= d\mathbf{M}_E^C - \mathbf{V}_E^C \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \end{aligned}$$

Integrando-se a expressão anterior sobre todo o corpo, obtém-se

$$\begin{aligned} \int d\dot{\mathbf{H}}_E^C &= \int d\mathbf{M}_E^C - \int \mathbf{V}_E^C \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_E^C &= \mathbf{M}_E^C - \mathbf{V}_E^C \times \int \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\ \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_E^C &= \mathbf{M}_E^C - \mathbf{V}_E^C \times (m \cdot \mathbf{V}_E^G) \\ \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_E^C &= \mathbf{M}_E^C + m \cdot \mathbf{V}_E^G \times \mathbf{V}_E^C \\ \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_E^C &= \mathbf{M}_E^C + m \cdot \tilde{\mathbf{V}}_E^G \cdot \mathbf{V}_E^C \end{aligned} \quad (10.7)$$

A expressão 10.7 relaciona a derivada do momento angular absoluto $\dot{\mathbf{H}}$ de um corpo, ao momento resultante externo $\mathbf{M}$, ambos tomados em relação ao mesmo polo. Pelo mesmo motivo que na seção anterior, embora o momento resultante infinitesimal $d\mathbf{M}$ inclua forças e momentos externos e internos, ao ser integrado sobre todo o corpo, a resultante global $\mathbf{M}$ representa apenas as forças e os momentos externos.

A expressão 10.7 pode ser dada também no sistema móvel Σ_Q

$$\begin{aligned} L_{QE} \cdot \dot{\mathbf{H}}_E^C &= L_{QE} \cdot (\mathbf{M}_E^C + m \cdot \tilde{\mathbf{V}}_E^G \cdot \mathbf{V}_E^C) \\ \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_Q^C + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_Q \cdot \mathbf{H}_Q^C &= L_{QE} \cdot \mathbf{M}_E^C + m \cdot L_{QE} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_E^G \cdot \mathbf{V}_E^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \dot{\mathbf{H}}_Q^C + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_Q \cdot \mathbf{H}_Q^C = \mathbf{M}_Q^C + m \cdot \mathbf{L}_{QE} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_E^G \cdot \mathbf{L}_{EQ} \cdot \mathbf{V}_Q^C \\
&\rightarrow \dot{\mathbf{H}}_Q^C + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_Q \cdot \mathbf{H}_Q^C = \mathbf{M}_Q^C + m \cdot \tilde{\mathbf{V}}_Q^G \cdot \mathbf{V}_Q^C
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Se o sistema Σ_Q for baricentral, ou seja, se $C \equiv G$, a expressão 10.8 reduz-se para

$$\dot{\mathbf{H}}_Q^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_Q \cdot \mathbf{H}_Q^G = \mathbf{M}_Q^G \tag{10.9}$$

É preciso agora determinar a expressão para o momento angular $\mathbf{H}_Q^C$ do corpo, com componentes no sistema móvel Σ_Q , em função de suas propriedades cinemáticas e da sua distribuição mássica. Para tanto, pode-se partir novamente da expressão 10.6 conforme mostrado a seguir

$$\begin{aligned}
d\mathbf{H}_E^C &= \mathbf{r}_E^{C \rightarrow P_i} \times \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\
&\rightarrow d\mathbf{H}_E^C = \tilde{\mathbf{r}}_E^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\
&\rightarrow \mathbf{L}_{QE} \cdot d\mathbf{H}_E^C = \mathbf{L}_{QE} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_E^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{V}_E^{P_i} \cdot dm \\
&\rightarrow d\mathbf{H}_Q^C = \mathbf{L}_{QE} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_E^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{L}_{EQ} \cdot \mathbf{V}_Q^{P_i} \cdot dm \\
&\rightarrow d\mathbf{H}_Q^C = \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{V}_Q^{P_i} \cdot dm \\
&\rightarrow d\mathbf{H}_Q^C = \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot (\mathbf{V}_Q^C + \dot{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_Q \cdot \mathbf{r}_Q^{C \rightarrow P_i}) \cdot dm
\end{aligned}$$

Como a presente análise está sendo conduzida para um corpo rígido, tem-se que $\dot{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} = \mathbf{0}$, de modo que

$$\begin{aligned}
d\mathbf{H}_Q^C &= (\tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{V}_Q^C + \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_Q \cdot \mathbf{r}_Q^{C \rightarrow P_i}) \cdot dm \\
&\rightarrow d\mathbf{H}_Q^C = \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{V}_Q^C \cdot dm - \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \cdot dm
\end{aligned}$$

Integrando-se a expressão anterior sobre todo o corpo, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{H}_Q^C &= \int \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \mathbf{V}_Q^C \cdot dm - \int \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \cdot dm \\
&\rightarrow \mathbf{H}_Q^C = \left(\int \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot dm \right) \cdot \mathbf{V}_Q^C - \left(\int \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_Q^{C \rightarrow P_i} \cdot dm \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_Q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \mathbf{H}_Q^C &= \left(\int [\tilde{\mathbf{R}}_Q^{C \rightarrow G} + \tilde{\mathbf{r}}_Q^{G \rightarrow P_i}] \cdot dm \right) \cdot \mathbf{V}_Q^C \\
&\quad - \left(\int \begin{bmatrix} 0 & -z_Q^{P_i} & y_Q^{P_i} \\ z_Q^{P_i} & 0 & -x_Q^{P_i} \\ -y_Q^{P_i} & x_Q^{P_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_Q^{P_i} & y_Q^{P_i} \\ z_Q^{P_i} & 0 & -x_Q^{P_i} \\ -y_Q^{P_i} & x_Q^{P_i} & 0 \end{bmatrix} \cdot dm \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \\
\rightarrow \mathbf{H}_Q^C &= \left(\int \tilde{\mathbf{R}}_Q^{C \rightarrow G} \cdot dm + \int \tilde{\mathbf{r}}_Q^{G \rightarrow P_i} \cdot dm \right) \cdot \mathbf{V}_Q^C \\
&\quad - \left(\int \begin{bmatrix} -(y_Q^{P_i^2} + z_Q^{P_i^2}) & x_Q^{P_i} \cdot y_Q^{P_i} & x_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} \\ x_Q^{P_i} \cdot y_Q^{P_i} & -(x_Q^{P_i^2} + z_Q^{P_i^2}) & y_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} \\ x_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} & y_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} & -(x_Q^{P_i^2} + y_Q^{P_i^2}) \end{bmatrix} \cdot dm \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \\
\rightarrow \mathbf{H}_Q^C &= \left(\int dm \right) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q^{C \rightarrow G} \cdot \mathbf{V}_Q^C \\
&\quad + \begin{bmatrix} \int (y_Q^{P_i^2} + z_Q^{P_i^2}) \cdot dm & -\int x_Q^{P_i} \cdot y_Q^{P_i} \cdot dm & -\int x_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} \cdot dm \\ -\int x_Q^{P_i} \cdot y_Q^{P_i} \cdot dm & \int (x_Q^{P_i^2} + z_Q^{P_i^2}) \cdot dm & -\int y_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} \cdot dm \\ -\int x_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} \cdot dm & -\int y_Q^{P_i} \cdot z_Q^{P_i} \cdot dm & \int (x_Q^{P_i^2} + y_Q^{P_i^2}) \cdot dm \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \\
\rightarrow \mathbf{H}_Q^C &= m \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q^{C \rightarrow G} \cdot \mathbf{V}_Q^C + \begin{bmatrix} I_Q^{xx} & -I_Q^{xy} & -I_Q^{xz} \\ -I_Q^{xy} & I_Q^{yy} & -I_Q^{yz} \\ -I_Q^{xz} & -I_Q^{yz} & I_Q^{zz} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \\
\rightarrow \mathbf{H}_Q^C &= m \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q^{C \rightarrow G} \cdot \mathbf{V}_Q^C + \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \tag{10.10}
\end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{I}_Q$ é denominada matriz ou tensor de inércia, e descreve a distribuição mássica do corpo ao redor do sistema de referência sobre o qual é calculado, no caso, o sistema Σ_Q . Os termos I_Q^{xx} , I_Q^{yy} e I_Q^{zz} são denominados momentos de inércia, ao passo que os termos I_Q^{xy} , I_Q^{xz} e I_Q^{yz} são denominados produtos de inércia. Note que, uma vez que o sistema Σ_Q é solidário ao corpo e este é considerado rígido, a sua distribuição mássica ao redor de Σ_Q e, consequentemente, a matriz $\mathbf{I}_Q$, são constantes no tempo.

Se o sistema Σ_Q for baricentral, a expressão 10.10 reduz-se para

$$\rightarrow \mathbf{H}_Q^C = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\omega}_Q \tag{10.11}$$

11 DINÂMICA DO QUADRICÓPTERO

11.1 Forças e acelerações

Sendo a resultante de forças externas atuantes sobre o quadricóptero dada por

$$\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

e a aceleração do seu baricentro dada pela expressão 9.2, fazendo-se $P \equiv G$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B^P &= \dot{\mathbf{V}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{V}_B^G + \ddot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} + \frac{d}{dt}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B) \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{r}_B^{G \rightarrow P} + 2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \dot{\mathbf{r}}_B^{G \rightarrow P} \\ &\rightarrow \mathbf{a}_B^G = \dot{\mathbf{V}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{V}_B^G \end{aligned}$$

da aplicação da expressão 10.5 resulta

$$\begin{aligned} m \cdot \mathbf{a}_B^G &= \mathbf{F}_B \\ \rightarrow \dot{\mathbf{V}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{V}_B^G &= \frac{\mathbf{F}_B}{m} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u} - r \cdot v + q \cdot w &= \frac{X}{m} \\ \rightarrow \dot{v} + r \cdot u - p \cdot w &= \frac{Y}{m} \\ \dot{w} - q \cdot u + p \cdot v &= \frac{Z}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= r.v - q.w + \frac{X}{m} \\
\rightarrow \dot{v} &= p.w - r.u + \frac{Y}{m} \\
\dot{w} &= q.u - p.v + \frac{Z}{m}
\end{aligned} \tag{11.1}$$

11.2 Momentos e acelerações angulares

Uma vez que o sistema móvel Σ_B , solidário ao quadricóptero, é baricentral, pode-se utilizar a expressão 10.11 para obter o seu momento angular

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_B^G &= \mathbf{I}_B \cdot \boldsymbol{\omega}_B \\
\rightarrow \mathbf{H}_B^G &= \begin{bmatrix} I_B^{xx} & -I_B^{xy} & -I_B^{xz} \\ -I_B^{xy} & I_B^{yy} & -I_B^{yz} \\ -I_B^{xz} & -I_B^{yz} & I_B^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A derivada da expressão anterior para um observador que se move juntamente com Σ_B é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{H}}_B^G &= \dot{\mathbf{I}}_B \cdot \boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{I}_B \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \\
\rightarrow \dot{\mathbf{H}}_B^G &= \mathbf{I}_B \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \\
\rightarrow \dot{\mathbf{H}}_B^G &= \begin{bmatrix} I_B^{xx} & -I_B^{xy} & -I_B^{xz} \\ -I_B^{xy} & I_B^{yy} & -I_B^{yz} \\ -I_B^{xz} & -I_B^{yz} & I_B^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Note que a utilização da base Σ_B solidária ao quadricóptero associada à hipótese de corpo rígido, faz com que a derivada temporal da matriz de inércia $\mathbf{I}_B$ seja nula.

Assim, sendo a resultante de momentos externos em relação ao polo baricentral G dada por

$$\mathbf{M}_B^G = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

da aplicação da expressão 10.9 resulta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_B^G + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \cdot \mathbf{H}_B^G &= \mathbf{M}_B^G \\ \rightarrow \begin{bmatrix} I_B^{xx} & -I_B^{xy} & -I_B^{xz} \\ -I_B^{xy} & I_B^{yy} & -I_B^{yz} \\ -I_B^{xz} & -I_B^{yz} & I_B^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B^{xx} & -I_B^{xy} & -I_B^{xz} \\ -I_B^{xy} & I_B^{yy} & -I_B^{yz} \\ -I_B^{xz} & -I_B^{yz} & I_B^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Porém, como os planos $O_B x_B z_B$ e $O_B y_B z_B$ do sistema Σ_B coincidem com os respectivos planos de simetria do quadricóptero, têm-se que os produtos de inércia I_B^{xy} , I_B^{xz} e I_B^{yz} são nulos, restando em $\mathbf{I}_B$ apenas os momentos de inércia I_B^{xx} , I_B^{yy} e I_B^{zz} . Assim,

$$\begin{bmatrix} I_B^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_B^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_B^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_B^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_B^{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_B^{xx} \cdot \dot{p} - r \cdot I_B^{yy} \cdot q + q \cdot I_B^{zz} \cdot r &= L \\ \rightarrow I_B^{yy} \cdot \dot{q} + r \cdot I_B^{xx} \cdot p - p \cdot I_B^{zz} \cdot r &= M \\ I_B^{zz} \cdot \dot{r} - q \cdot I_B^{xx} \cdot p + p \cdot I_B^{yy} \cdot q &= N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} + \frac{(-I_B^{yy} + I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r &= \frac{L}{I_B^{xx}} \\ \rightarrow \dot{q} + \frac{(I_B^{xx} - I_B^{zz})}{I_B^{yy}} p \cdot r &= \frac{M}{I_B^{yy}} \\ \dot{r} + \frac{(-I_B^{xx} + I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q &= \frac{N}{I_B^{zz}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r + \frac{L}{I_B^{xx}} \\ \rightarrow \dot{q} &= \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} p \cdot r + \frac{M}{I_B^{yy}} \\ \dot{r} &= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q + \frac{N}{I_B^{zz}} \end{aligned} \tag{11.2}$$

11.3 Resultantes externas

Para que se possam completar as equações diferenciais 11.1 e 11.2, consideram-se as forças e momentos atuantes sobre o quadricóptero indicadas na figura 11.1.

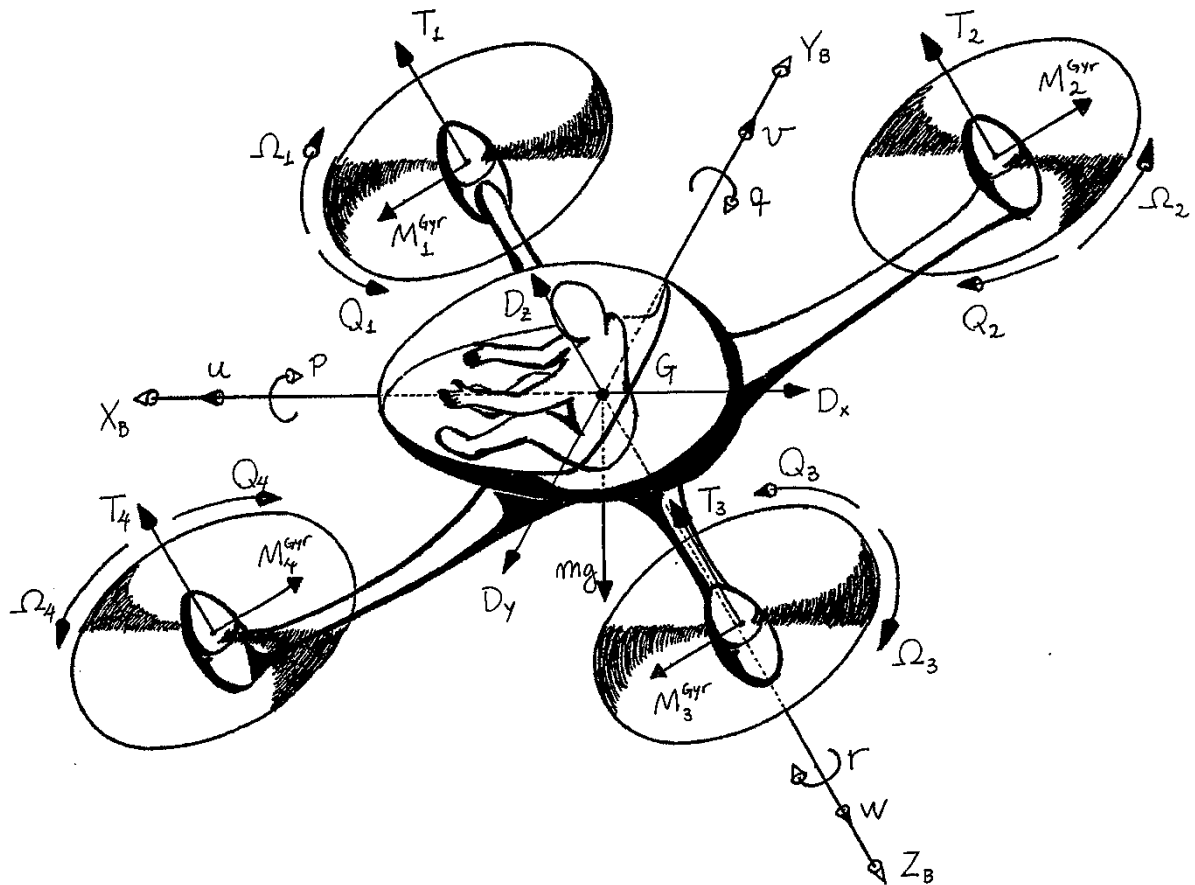


Figura 11.1 – Forças e momentos atuantes sobre o quadricóptero

Vale ressaltar que a aplicação feita anteriormente da Segunda Lei de Newton para a obtenção das relações entre forças e acelerações, bem como entre momentos e acelerações angulares, foi conduzida considerando-se o quadricóptero como um corpo rígido, de modo que as massas das partes móveis foram convenientemente incorporadas à massa do corpo principal da aeronave. Assim, a representação dos rotores e do piloto na figura 11.1 visa apenas facilitar a visualização das forças e momentos em relação ao quadricóptero.

Por outro lado, as forças e momentos resultantes das interações entre os rotores e o ar, bem como os momentos resultantes da dinâmica individual de cada um dos rotores (momentos resultantes das acelerações angulares e os momentos giroscópicos) serão aplicados ao corpo principal do quadricóptero como se fossem forças e momentos externos, conforme será mostrado nas seções seguintes.

11.4 Força peso $\mathbf{F}^W$

Da forma como foram definidos os sistemas de referência, tem-se que a força peso é sempre paralela ao eixo $O_E z_E$ do referencial fixo Σ_E . Assim, para que esta parcela possa ser acrescentada ao equacionamento em desenvolvimento, deve-se fazer

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B^W &= L_{BE} \cdot \mathbf{F}_E^W \\ \rightarrow \mathbf{F}_B^W &= \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot c\theta \\ c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \cdot g \end{bmatrix} \\ \rightarrow \mathbf{F}_B^W &= \begin{bmatrix} -s\theta \cdot m \cdot g \\ s\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g \\ c\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g \end{bmatrix} \\ \rightarrow \mathbf{F}_B^W &= \begin{bmatrix} -s\theta \cdot m \cdot g \\ s\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g \\ c\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g \end{bmatrix} \quad (11.3)\end{aligned}$$

11.5 Força de empuxo dos rotores $\mathbf{F}^T$

Através da Análise Dimensional é possível determinar que o empuxo T_i do i – ésimo rotor é proporcional ao quadrado da sua rotação Ω_i , segundo a expressão

$$T_i = k_{T_i} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_i^2 \quad (11.4)$$

onde D é o diâmetro dos rotores, ρ a massa específica local do ar atmosférico e k_{T_i} é uma constante de proporcionalidade adimensional denominada coeficiente de empuxo (HOUGHTON, 2013).

Por simplicidade, será considerado que T_i possui direção paralela ao eixo $O_B Z_B$ do referencial móvel Σ_B .

Assim, pode-se obter a expressão para a força de empuxo total

$$\mathbf{F}_B^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T_1 - T_2 - T_3 - T_4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_B^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

11.6 Força de sustentação aerodinâmica $\mathbf{F}^L$

O módulo L da força de sustentação pode ser representado pela expressão

$$L = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_L \quad (11.6)$$

onde V é o módulo da velocidade do fluxo incidente de ar, S é uma área característica do corpo e C_L é o coeficiente de sustentação. A direção da força de sustentação é definida perpendicularmente em relação à direção do fluxo incidente de ar, e paralela ao plano de simetria longitudinal/vertical, com sentido positivo para cima, no caso de aeronaves em voo de cruzeiro.

A força de sustentação é produzida pelos gradientes de pressões que surgem ao redor das superfícies dos corpos, em função das suas características geométricas, quando estes são posicionados em meio a um escoamento. Assim, L é um fator de projeto, podendo ser maximizado, minimizado, ou até mesmo anulado, dependendo da aplicação do objeto em questão.

O quadricóptero em desenvolvimento não possui superfícies com perfis que produzam sustentação aerodinâmica apreciável, além, é claro, das superfícies das lâminas dos rotores. Adicionalmente, uma das características que definem um quadricóptero é justamente a sua capacidade de voo pairado, situação na qual a existência de superfícies fixas dedicadas à sustentação não se justificaria. Assim, será assumido que o seu coeficiente de sustentação é nulo,

$$C_L = 0$$

implicando que a força de sustentação aerodinâmica também seja nula

$$\mathbf{F}_B^L = \mathbf{0} \quad (11.7)$$

11.7 Força de arrasto aerodinâmico $\mathbf{F}^D$

O módulo D da força de arrasto pode ser representado pela expressão

$$D = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_D \quad (11.8)$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto. A sua direção e o seu sentido coincidem com a direção e o sentido do fluxo incidente de ar.

O arrasto aerodinâmico é um fenómeno normalmente indesejado, que ocorre devido à transferência de energia dos corpos para o escoamento. Embora seja possível minimizar o seu efeito, através do projeto de corpos delgados aerodinâmicos que causem menor perturbação no fluido circundante, ele não pode ser totalmente eliminado por conta do caráter irreversível de todos os processos termodinâmicos reais.

Assim, com base na expressão 11.8, pode-se obter a força de arrasto aerodinâmico para o quadricóptero

$$\mathbf{F}_B^D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \rho \cdot u \cdot \sqrt{u^2} \cdot S \cdot C_D \\ -\frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \sqrt{v^2} \cdot S \cdot C_D \\ -\frac{1}{2} \rho \cdot w \cdot \sqrt{w^2} \cdot S \cdot C_D \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Na expressão 11.9 está inserida a hipótese de que o coeficiente de arrasto C_D independe da velocidade e da direção do escoamento.

11.8 Momento causado pelo empuxo dos rotores $\mathbf{M}^T$

Sendo l a distância entre qualquer um dos quatro rotores aos eixos coordenados do referencial móvel Σ_B , tem-se que o momento causado pelo empuxo dos rotores sobre o quadricóptero, tomando-se como polo o centro de massa G , é dado por

$$\mathbf{M}_B^T = \begin{bmatrix} l \cdot (-T_1 - T_2 + T_3 + T_4) \\ l \cdot (T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{M}_B^T = \begin{bmatrix} \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (-k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \\ \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

11.9 Momento causado pelo torque de arrasto dos rotores $\mathbf{M}^Q$

Assim como para o caso do empuxo T_i , através da Análise Dimensional é possível determinar que o torque de arrasto Q_i do i – ésimo rotor é proporcional ao quadrado da sua rotação Ω_i , segundo a expressão

$$Q_i = k_{Q_i} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_i^2 \quad (11.11)$$

onde k_{Q_i} é uma constante de proporcionalidade adimensional denominada coeficiente de torque (HOUGHTON, 2013).

Assim, o momento causado pelo torque de arrasto dos rotores é dado por

$$\mathbf{M}_B^Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{M}_B^Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \cdot D^5 \cdot (-k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

11.10 Momento causado pela força de sustentação aerodinâmica $\mathbf{M}^L$

Uma vez que foi considerado que a força de sustentação aerodinâmica $\mathbf{F}^L$ é nula, tem-se de imediato que o momento causado por ela também é nulo, ou seja,

$$\mathbf{M}_B^L = \mathbf{0} \quad (11.13)$$

11.11 Momento causado pela força de arrasto aerodinâmico $\mathbf{M}^D$

Para o surgimento do momento causado pelo arrasto é necessário que o arrasto em um dos lados da aeronave seja maior que no lado oposto.

Uma primeira situação na qual esse efeito poderia ser notado seria durante um voo com translação. Porém, supondo a ausência de perturbações, tal efeito não apareceria de forma significativa dada a simetria da aeronave.

Outra situação na qual esse tipo de momento apareceria seria se o quadricóptero comesse a girar ao redor do próprio eixo com rotação elevada. Esta, porém, não é uma manobra prevista em situações normais.

Do exposto parece razoável assumir que o momento causado pelo arrasto aerodinâmico pode ser desprezado, ou seja,

$$\mathbf{M}_B^D = \mathbf{0} \quad (11.14)$$

11.12 Momentos aplicados pelos rotores $\mathbf{M}^{Gyr}$

Por fim, devem-se considerar os momentos aplicados pelos quatro conjuntos de partes girantes dos motores e dos rotores sobre o restante do quadricóptero. Por simplicidade, cada um desses conjuntos será referido simplesmente como rotor.

Uma das implicações de se considerar o corpo principal do quadricóptero como um corpo rígido é que o vetor momento angular de cada um dos quatro rotores fica sempre paralelo ao eixo $O_B z_B$ do referencial móvel Σ_B . Isso possibilita a definição dos sistemas móveis Σ_{B_i} , solidários ao quadricóptero, de forma que os eixos $O_{B_i} x_{B_i}$, $O_{B_i} y_{B_i}$ e $O_{B_i} z_{B_i}$ tenham direções e sentidos coincidentes com os eixos homólogos do sistema Σ_B , e que os eixos $O_{B_i} z_{B_i}$ sejam colineares aos eixos de rotação dos respectivos rotores.

Assim, desprezando-se a parcela da velocidade angular do quadricóptero no cômputo das rotações dos rotores, o momento angular baricentral do i – ésimo rotor, visto por um observador no sistema fixo Σ_E , e descrito com componentes no sistema móvel Σ_{B_i} , é dado por

$$\mathbf{H}_{B_i}^{(i)} = \mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)}$$

onde a matriz de inércia $\mathbf{I}_{B_i}^{(i)}$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)}$ são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{I}_{B_i}^{(i)} = \begin{bmatrix} I_{B_i}^{xx(i)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{B_i}^{yy(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{B_i}^{zz(i)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)} = (-1)^{i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_i \end{bmatrix}$$

Note que, em função da simetria radial dos rotores e do conveniente posicionamento dos sistemas Σ_{B_i} , a matriz $\mathbf{I}_{B_i}^{(i)}$ torna-se diagonal e constante no tempo.

Então, com o auxílio da expressão 10.9, obtêm-se os momentos aplicados pelo corpo principal do quadricóptero sobre o i – ésimo rotor

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{B_i}^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B_i} \cdot \mathbf{H}_{B_i}^{(i)} &= \mathbf{M}_{B_i}^{(i)} \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)} \right) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B_i} \cdot \mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)} &= \mathbf{M}_{B_i}^{(i)} \\ \rightarrow \dot{\mathbf{I}}_{B_i}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)} + \mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_i}^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B_i} \cdot \mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)} &= \mathbf{M}_{B_i}^{(i)} \\ \rightarrow \mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{B_i}^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B_i} \cdot \mathbf{I}_{B_i}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{(i)} &= \mathbf{M}_{B_i}^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \begin{bmatrix} I_{B_i}^{xx(i)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{B_i}^{yy(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{B_i}^{zz(i)} \end{bmatrix} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Omega}_i \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B_i}^{xx(i)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{B_i}^{yy(i)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{B_i}^{zz(i)} \end{bmatrix} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_i \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{B_i}^{(i)} \\
& \rightarrow \mathbf{M}_{B_i}^{(i)} = (-1)^{i+1} \cdot \begin{bmatrix} q \cdot I_{B_i}^{zz(i)} \cdot \Omega_i \\ -p \cdot I_{B_i}^{zz(i)} \cdot \Omega_i \\ I_{B_i}^{zz(i)} \cdot \dot{\Omega}_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, lembrando-se do paralelismo entre os sistemas Σ_{B_i} e Σ_B , tem-se que, pela Terceira Lei de Newton, o momento aplicado pelos rotores sobre o corpo principal do quadricóptero, descrito com componentes no sistema Σ_B , será

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B^{Gyr} &= - \sum_{i=1}^4 \mathbf{M}_B^{(i)} \\
\rightarrow \mathbf{M}_B^{Gyr} &= \begin{bmatrix} q \cdot I^r \cdot (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \\ p \cdot I^r \cdot (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \\ I^r \cdot (-\dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_3 + \dot{\Omega}_4) \end{bmatrix} \quad (11.15)
\end{aligned}$$

onde os momentos de inércia $I_{B_i}^{zz(i)}$ de cada um dos quatro rotores foram considerados iguais a I^r .

Nota-se que os dois primeiros componentes do vetor $\mathbf{M}_B^{Gyr}$ representam momentos giroscópicos ao passo que o terceiro é resultante da aceleração angular dos rotores, onde desprezou-se os atritos nos mancais.

11.13 Resultante das forças externas $\mathbf{F}_B$

De posse das parcelas 11.3, 11.5, 11.7 e 11.9, conclui-se que a resultante das forças externas atuante sobre o quadricóptero é

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_B &= \mathbf{F}_B^W + \mathbf{F}_B^T + \mathbf{F}_B^L + \mathbf{F}_B^D \\
\rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -s\theta \cdot m \cdot g \\ s\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g \\ c\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \rho \cdot u \cdot \sqrt{u^2} \cdot S \cdot C_D \\ -\frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \sqrt{v^2} \cdot S \cdot C_D \\ -\frac{1}{2} \rho \cdot w \cdot \sqrt{w^2} \cdot S \cdot C_D \end{bmatrix} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -s\theta \cdot m \cdot g - \frac{1}{2} \rho \cdot u \cdot \sqrt{u^2} \cdot S \cdot C_D \\ s\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g - \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \sqrt{v^2} \cdot S \cdot C_D \\ c\phi \cdot c\theta \cdot m \cdot g - \rho \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) - \frac{1}{2} \rho \cdot w \cdot \sqrt{w^2} \cdot S \cdot C_D \end{bmatrix} \quad (11.16)
\end{aligned}$$

11.14 Resultante dos momentos externos $\mathbf{M}_B$

De posse das parcelas 11.10, 11.12, 11.13, 11.14 e 11.15 conclui-se que a resultante dos momentos externos atuante sobre o quadricóptero é

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B^G &= \mathbf{M}_B^T + \mathbf{M}_B^Q + \mathbf{M}_B^L + \mathbf{M}_B^D + \mathbf{M}_B^{Gyr} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (-k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \\ \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \cdot D^5 \cdot (-k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} q \cdot I^r \cdot (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \\ p \cdot I^r \cdot (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \\ I^r \cdot (-\dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_3 + \dot{\Omega}_4) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (-k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) + q \cdot I^r \cdot (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \\ \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) + p \cdot I^r \cdot (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \\ \rho \cdot D^5 \cdot (-k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2) + I^r \cdot (-\dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_3 + \dot{\Omega}_4) \end{bmatrix} \quad (11.17)
\end{aligned}$$

11.15 Equações diferenciais do quadricóptero

O primeiro conjunto de equações diferenciais a ser obtido envolve a relação entre a derivada do vetor posição $\mathbf{x}^G$ e o vetor velocidade $\mathbf{V}^G$

$$\dot{\mathbf{x}}_E^G = \mathbf{L}_{EB} \cdot \mathbf{V}_B^G$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi \\ c\theta \cdot s\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi \\ -s\theta & s\phi \cdot c\theta & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_E = c\theta \cdot c\psi \cdot u + (s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi) \cdot v + (c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi) \cdot w \quad (11.18)$$

$$\rightarrow \dot{y}_E = c\theta \cdot s\psi \cdot u + (s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi) \cdot v + (c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi) \cdot w \quad (11.19)$$

$$\dot{z}_E = -s\theta \cdot u + s\phi \cdot c\theta \cdot v + c\phi \cdot c\theta \cdot w \quad (11.20)$$

O segundo conjunto nada mais é que a expressão 9.5, que relaciona a taxa de variação temporal $\dot{\boldsymbol{\phi}}_B$ da posição angular com o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_B$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_B = \mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_B$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi \cdot \tan \theta & c\phi \cdot \tan \theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi \cdot \sec \theta & c\phi \cdot \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\dot{\phi} = p + s\phi \cdot \tan \theta \cdot q + c\phi \cdot \tan \theta \cdot r \quad (11.21)$$

$$\rightarrow \dot{\theta} = c\phi \cdot q - s\phi \cdot r \quad (11.22)$$

$$\dot{\psi} = s\phi \cdot \sec \theta \cdot q + c\phi \cdot \sec \theta \cdot r \quad (11.23)$$

O terceiro conjunto de equações diferenciais vem da substituição da expressão 11.16, que representa a resultante das forças externas, na expressão 11.1

$$\begin{aligned}\dot{u} &= r.v - q.w + \frac{X}{m} \\ \dot{v} &= p.w - r.u + \frac{Y}{m} \\ \dot{w} &= q.u - p.v + \frac{Z}{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{u} &= r.v - q.w + \frac{1}{m} \left(-s\theta.m.g - \frac{1}{2}\rho.u.\sqrt{u^2}.S.C_D \right) \\ \dot{v} &= p.w - r.u + \frac{1}{m} \left(s\phi.c\theta.m.g - \frac{1}{2}\rho.v.\sqrt{v^2}.S.C_D \right) \\ \dot{w} &= q.u - p.v + \frac{1}{m} \left(c\phi.c\theta.m.g - \rho.D^4.(k_{T_1}.\Omega_1^2 + k_{T_2}.\Omega_2^2 + k_{T_3}.\Omega_3^2 + k_{T_4}.\Omega_4^2) - \frac{1}{2}\rho.w.\sqrt{w^2}.S.C_D \right)\end{aligned}$$

$$\dot{u} = r.v - q.w - g.s\theta - \frac{\rho.S.C_D}{2.m}u.\sqrt{u^2} \quad (11.24)$$

$$\dot{v} = p.w - r.u + g.s\phi.c\theta - \frac{\rho.S.C_D}{2.m}v.\sqrt{v^2} \quad (11.25)$$

$$\begin{aligned}\dot{w} &= q.u - p.v + g.c\phi.c\theta - \frac{\rho.S.C_D}{2.m}w.\sqrt{w^2} \\ &\quad - \frac{\rho.D^4}{m}(k_{T_1}.\Omega_1^2 + k_{T_2}.\Omega_2^2 + k_{T_3}.\Omega_3^2 + k_{T_4}.\Omega_4^2)\end{aligned} \quad (11.26)$$

Finalmente, o quarto e último conjunto de equações diferenciais vem da substituição da expressão 11.17, que representa a resultante dos momentos externos, na expressão 11.2

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}}q.r + \frac{L}{I_B^{xx}} \\ \dot{q} &= \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}}p.r + \frac{M}{I_B^{yy}} \\ \dot{r} &= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}}p.q + \frac{N}{I_B^{zz}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r + \frac{1}{I_B^{xx}} \left(\rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (-k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) + q \cdot I^r \cdot (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \right) \\
\rightarrow \quad \dot{q} &= \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} p \cdot r + \frac{1}{I_B^{yy}} \left(\rho \cdot l \cdot D^4 \cdot (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) + p \cdot I^r \cdot (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \right) \\
\dot{r} &= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q + \frac{1}{I_B^{zz}} \left(\rho \cdot D^5 \cdot (-k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2) + I^r \cdot (-\dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_3 + \dot{\Omega}_4) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r + \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \cdot q \\
&\quad + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2)
\end{aligned} \tag{11.27}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} p \cdot r + \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \cdot p \\
&\quad + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2)
\end{aligned} \tag{11.28}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &+ \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \\
&= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q \\
&\quad + \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2)
\end{aligned} \tag{11.29}$$

12 DINÂMICA DOS MOTORES ELÉTRICOS

Nesta seção será obtido um modelo simplificado para a dinâmica dos motores elétricos, responsáveis (juntamente com os rotores) pela sustentação, propulsão e manobrabilidade do quadricóptero.

Para tanto, considere o esquema de um motor elétrico de corrente contínua, controlado pela tensão no estator, apresentado na figura 12.1.

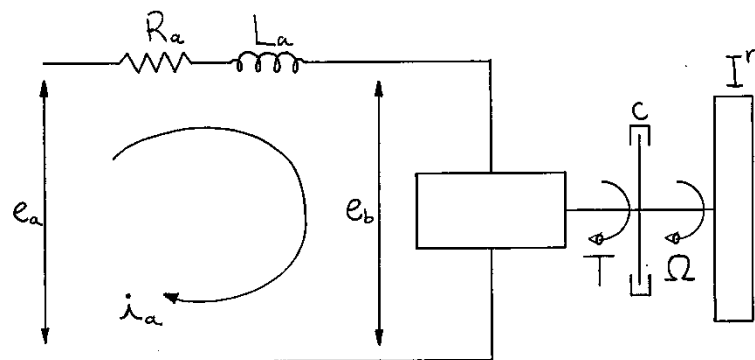


Figura 12.1 – Esquema de um motor elétrico controlado pela tensão no estator

Considere também as seguintes grandezas físicas:

- R_a – Resistência do estator
- L_a – Indutância do estator
- i_a – Corrente no estator
- e_a – Tensão aplicada no estator
- e_b – Tensão contra-eletromotriz
- Ω – Velocidade angular do eixo do motor
- T – Torque desenvolvido pelo motor
- I^r – Momento de inércia do conjunto de partes rotativas do motor e do rotor
- c – Coeficiente de atrito viscoso dos mancais do motor

Para um motor com corrente de campo constante ou com campo criado por ímãs permanentes, o torque T é diretamente proporcional à corrente do estator, ou seja,

$$T = K \cdot i_a \quad (12.1)$$

onde K é a constante de torque do motor (OGATA, 2004).

Assim, uma equação relacionando o comportamento mecânico do motor ao seu comportamento elétrico, pode ser obtida com o auxílio da equação 12.1, aplicando-se o equilíbrio de torques sobre o rotor

$$\begin{aligned} I^r \cdot \dot{\Omega} + c \cdot \Omega &= T \\ \rightarrow I^r \cdot \dot{\Omega} + c \cdot \Omega &= K \cdot i_a \end{aligned} \quad (12.2)$$

Adicionalmente, quando os ímãs são movimentados em relação ao estator, surge uma tensão contra-eletromotriz induzida, proporcional à velocidade angular, de modo que

$$e_b = K_b \cdot \Omega \quad (12.3)$$

onde K_b é a constante de tensão contra-eletromotriz.

Uma equação relacionando os parâmetros elétricos do circuito da figura 12.1 pode ser obtida aplicando-se sobre ele a Lei das Malhas de Kirchhoff, obtendo-se

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + e_b = e_a \quad (12.4)$$

Assumindo-se condições iniciais nulas e aplicando-se a Transformada de Laplace nas equações 12.2, 12.3 e 12.4, é possível obter a função de transferência que relaciona a velocidade angular do motor à tensão aplicada no estator, sem a presença explícita da corrente no estator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e_b) &= \mathcal{L}(K_b \cdot \Omega) \\ \rightarrow E_b(s) &= K_b \cdot \Omega(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(I^r \cdot \dot{\Omega}) + \mathcal{L}(c \cdot \Omega) &= \mathcal{L}(K \cdot i_a) \\
\rightarrow I^r \cdot s \cdot \Omega(s) + c \cdot \Omega(s) &= K \cdot I_a(s) \\
\rightarrow (I^r \cdot s + c) \cdot \Omega(s) &= K \cdot I_a(s) \\
\rightarrow I_a(s) &= \frac{(I^r \cdot s + c)}{K} \Omega(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(L_a \frac{di_a}{dt}\right) + \mathcal{L}(R_a \cdot i_a) + \mathcal{L}(e_b) &= \mathcal{L}(e_a) \\
\rightarrow L_a \cdot s \cdot I_a(s) + R_a \cdot I_a(s) + E_b(s) &= E_a(s) \\
\rightarrow (L_a \cdot s + R_a) \cdot I_a(s) + K_b \cdot \Omega(s) &= E_a(s) \\
\rightarrow \frac{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (I^r \cdot s + c)}{K} \Omega(s) + K_b \cdot \Omega(s) &= E_a(s) \\
\rightarrow \frac{(L_a \cdot s + R_a) \cdot (I^r \cdot s + c) + K \cdot K_b}{K} \Omega(s) &= E_a(s) \\
\rightarrow \frac{\Omega(s)}{E_a(s)} &= \frac{K}{L_a \cdot I^r \cdot s^2 + (L_a \cdot c + R_a \cdot I^r) \cdot s + R_a \cdot c + K \cdot K_b}
\end{aligned}$$

Desprezando-se a indutância L_a do estator, obtém-se

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{\Omega(s)}{E_a(s)} &= \frac{K}{R_a \cdot I^r \cdot s + R_a \cdot c + K \cdot K_b} \\
\rightarrow \frac{\Omega(s)}{E_a(s)} &= \frac{\frac{K}{R_a \cdot c + K \cdot K_b}}{\frac{R_a \cdot I^r}{R_a \cdot c + K \cdot K_b} s + 1} \\
\rightarrow \frac{\Omega(s)}{E_a(s)} &= \frac{K_m}{T_m \cdot s + 1} \tag{12.5}
\end{aligned}$$

onde $K_m = \frac{K}{R_a \cdot c + K \cdot K_b}$ é o ganho do motor e $T_m = \frac{R_a \cdot I^r}{R_a \cdot c + K \cdot K_b}$ é a constante de tempo do motor.

A partir da expressão 12.5, pode-se obter a equação diferencial relacionando a velocidade angular do motor e a tensão aplicada no estator

$$\begin{aligned}
(T_m \cdot s + 1) \cdot \Omega(s) &= K_m \cdot E_a(s) \\
\rightarrow T_m \cdot s \cdot \Omega(s) + \Omega(s) &= K_m \cdot E_a(s)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}(T_m \cdot s \cdot \Omega(s)) + \mathcal{L}^{-1}(\Omega(s)) = \mathcal{L}^{-1}(K_m \cdot E_a(s))$$

$$\rightarrow T_m \cdot \dot{\Omega} + \Omega = K_m \cdot e_a$$

$$\rightarrow \dot{\Omega} = -\frac{1}{T_m} \Omega + \frac{K_m}{T_m} e_a$$

de modo que para o i – ésimo motor tem-se

$$\dot{\Omega}_i = -\frac{1}{T_{m_i}} \Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} e_i \quad (12.6)$$

Na prática, as entradas de controle não serão diretamente as tensões e_i aplicadas nos estatores, mas sim, sinais de controle u_i modulados no padrão PWM (*Pulse-Width Modulation*) com 8 bits de resolução e aplicados aos ESCs (*Electronic Speed Control*), que por sua vez se comunicarão com os motores.

Assim, considerando-se a tensão aplicada no estator e_i diretamente proporcional ao sinal de entrada de controle u_i , pode-se reescrever a equação 12.6 da seguinte forma

$$\dot{\Omega}_i = -\frac{1}{T_{m_i}} \Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} u_i \quad (12.7)$$

onde K_{m_i} passa a ser o ganho do i – ésimo motor relativo ao sinal de entrada de controle u_i .

Note que os símbolos utilizados para a componente x da velocidade do quadricóptero u e para o sinal de entrada de controle u_i diferem apenas pela existência de um índice no segundo.

13 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A linearização de uma função qualquer pode ser feita através da sua expansão em Serie de Taylor ao redor do ponto de operação, e da subsequente eliminação dos termos de ordem superior. Assim, a linearização da função genérica

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ao redor do ponto de operação $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_0)$ é dada por

$$\begin{aligned} y = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) &+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_1} (x_1 - x_{10}) \\ &+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_2} (x_2 - x_{20}) + \dots \\ &+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_n} (x_n - x_{n0}) \end{aligned} \quad (13.1)$$

Considere a seguir os pontos de operação do quadricóptero para a condição de voo pairado e pequenas perturbações (ETKIN, 2005)

$$x_{E0} = x_{E0} \rightarrow x_E = x_{E0} + \Delta x_E$$

$$y_{E0} = y_{E0} \rightarrow y_E = y_{E0} + \Delta y_E$$

$$z_{E0} = z_{E0} \rightarrow z_E = z_{E0} + \Delta z_E$$

$$\phi_0 = 0 \rightarrow \phi = \Delta \phi$$

$$\theta_0 = 0 \rightarrow \theta = \Delta \theta$$

$$\psi_0 = 0 \rightarrow \psi = \Delta \psi$$

$$u_0 = 0 \rightarrow u = \Delta u$$

$$v_0 = 0 \rightarrow v = \Delta v$$

$$w_0 = 0 \rightarrow w = \Delta w$$

$$p_0 = 0 \rightarrow p = \Delta p$$

$$q_0 = 0 \rightarrow q = \Delta q$$

$$r_0 = 0 \rightarrow r = \Delta r$$

$$\Omega_{i_0} = \Omega_{i_0} \rightarrow \Omega_i = \Omega_{i_0} + \Delta \Omega_i$$

$$u_{i_0} = u_{i_0} \rightarrow u_i = u_{i_0} + \Delta u_i$$

Assim, expandindo-se cada uma das equações diferenciais que representam a dinâmica do quadricóptero e dos motores elétricos de forma análoga à conduzida para a função genérica da expressão 13.1, e tomando-se os pontos de operação listados anteriormente, obtém-se o sistema de equações diferenciais linearizadas a seguir (Para maiores detalhes, vide Apêndice A – Linearização do sistema)

$$\dot{x}_E = u \quad (13.2)$$

$$\dot{y}_E = v \quad (13.3)$$

$$\dot{z}_E = w \quad (13.4)$$

$$\dot{\phi} = p \quad (13.5)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (13.6)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (13.7)$$

$$\dot{u} = -g \cdot \theta \quad (13.8)$$

$$\dot{v} = g \cdot \phi \quad (13.9)$$

$$\dot{w} = -\frac{2 \cdot k_{T_1} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{1_0}}{m} \Delta \Omega_1 - \frac{2 \cdot k_{T_2} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{2_0}}{m} \Delta \Omega_2 - \frac{2 \cdot k_{T_3} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{3_0}}{m} \Delta \Omega_3 - \frac{2 \cdot k_{T_4} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{4_0}}{m} \Delta \Omega_4 \quad (13.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_{1_0} + \Omega_{2_0} - \Omega_{3_0} + \Omega_{4_0}) \cdot q - \frac{2 \cdot k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{1_0}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_1 \\ & - \frac{2 \cdot k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{2_0}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_2 + \frac{2 \cdot k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{3_0}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_3 \\ & + \frac{2 \cdot k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{4_0}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_4 \end{aligned} \quad (13.11)$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} = & \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_{10} - \Omega_{20} + \Omega_{30} - \Omega_{40}) \cdot p + \frac{2 \cdot k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{10}}{I_B^{yy}} \Delta\Omega_1 \\
& - \frac{2 \cdot k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{20}}{I_B^{yy}} \Delta\Omega_2 - \frac{2 \cdot k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{30}}{I_B^{yy}} \Delta\Omega_3 \\
& + \frac{2 \cdot k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{40}}{I_B^{yy}} \Delta\Omega_4
\end{aligned} \tag{13.12}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_1 - \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_2 + \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_3 - \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_4 \\
= - \frac{2 \cdot k_{Q_1} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{10}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_1 + \frac{2 \cdot k_{Q_2} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{20}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_2 \\
- \frac{2 \cdot k_{Q_3} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{30}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_3 + \frac{2 \cdot k_{Q_4} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{40}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_4
\end{aligned} \tag{13.13}$$

$$\dot{\Omega}_i = - \frac{1}{T_{m_i}} \Delta\Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} \Delta u_i \tag{13.14}$$

14 REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA LINEARIZADO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Com o intuito de permitir a implementação de técnicas de controle moderno, o sistema de equações diferenciais linearizadas do quadricóptero será representado em espaço de estados segundo a forma apresentada a seguir, apropriada para sistemas lineares com parâmetros físicos constantes no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (14.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (14.2)$$

A expressão 14.1 é a equação de estado, ao passo que a expressão 14.2 é a equação de saída. Os vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{u}$ são denominados, respectivamente, vetor de estado, vetor de saída e vetor de entrada de controle. Já as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são denominadas, respectivamente, matriz de estado, matriz de entrada de controle, matriz de saída e matriz de transmissão direta (OGATA, 2004).

Dados os requisitos do sistema de controle a ser desenvolvido, será necessária a implementação das equações diferenciais linearizadas 13.5, 13.6, 13.11, 13.12, 13.13 e 13.14, reproduzidas a seguir por conveniência

$$\dot{\phi} = p \quad (14.3)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (14.4)$$

$$\dot{p} = C_1 \cdot q + C_2 \cdot \Delta\Omega_1 + C_3 \cdot \Delta\Omega_2 + C_4 \cdot \Delta\Omega_3 + C_5 \cdot \Delta\Omega_4 \quad (14.5)$$

$$\dot{q} = C_6 \cdot p + C_7 \cdot \Delta\Omega_1 + C_8 \cdot \Delta\Omega_2 + C_9 \cdot \Delta\Omega_3 + C_{10} \cdot \Delta\Omega_4 \quad (14.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} + C_{11} \cdot \dot{\Omega}_1 + C_{12} \cdot \dot{\Omega}_2 + C_{13} \cdot \dot{\Omega}_3 + C_{14} \cdot \dot{\Omega}_4 \\ = C_{15} \cdot \Delta\Omega_1 + C_{16} \cdot \Delta\Omega_2 + C_{17} \cdot \Delta\Omega_3 + C_{18} \cdot \Delta\Omega_4 \end{aligned} \quad (14.7)$$

$$\dot{\Omega}_1 = C_{19} \cdot \Delta\Omega_1 + C_{20} \cdot \Delta u_1 \quad (14.8)$$

$$\dot{\Omega}_2 = C_{21} \cdot \Delta\Omega_2 + C_{22} \cdot \Delta u_2 \quad (14.9)$$

$$\dot{\Omega}_3 = C_{23} \cdot \Delta\Omega_3 + C_{24} \cdot \Delta u_3 \quad (14.10)$$

$$\dot{\Omega}_4 = C_{25} \cdot \Delta\Omega_4 + C_{26} \cdot \Delta u_4 \quad (14.11)$$

onde os coeficientes $C_{\#}$ são dados por

$$C_1 = \frac{I^r}{I_B^{xx}}(-\Omega_{10} + \Omega_{20} - \Omega_{30} + \Omega_{40})$$

$$C_2 = -\frac{2.k_{T_1}.\rho.l.D^4.\Omega_{10}}{I_B^{xx}}$$

$$C_3 = -\frac{2.k_{T_2}.\rho.l.D^4.\Omega_{20}}{I_B^{xx}}$$

$$C_4 = \frac{2.k_{T_3}.\rho.l.D^4.\Omega_{30}}{I_B^{xx}}$$

$$C_5 = \frac{2.k_{T_4}.\rho.l.D^4.\Omega_{40}}{I_B^{xx}}$$

$$C_6 = \frac{I^r}{I_B^{yy}}(\Omega_{10} - \Omega_{20} + \Omega_{30} - \Omega_{40})$$

$$C_7 = \frac{2.k_{T_1}.\rho.l.D^4.\Omega_{10}}{I_B^{yy}}$$

$$C_8 = -\frac{2.k_{T_2}.\rho.l.D^4.\Omega_{20}}{I_B^{yy}}$$

$$C_9 = -\frac{2.k_{T_3}.\rho.l.D^4.\Omega_{30}}{I_B^{yy}}$$

$$C_{10} = \frac{2.k_{T_4}.\rho.l.D^4.\Omega_{40}}{I_B^{yy}}$$

$$C_{11} = \frac{I^r}{I_B^{zz}}$$

$$C_{12} = -\frac{I^r}{I_B^{zz}}$$

$$C_{13} = \frac{I^r}{I_B^{zz}}$$

$$C_{14} = -\frac{I^r}{I_B^{zz}}$$

$$C_{15} = -\frac{2.k_{Q_1}.\rho.D^5.\Omega_{10}}{I_B^{zz}}$$

$$C_{16} = \frac{2.k_{Q_2}.\rho.D^5.\Omega_{20}}{I_B^{zz}}$$

$$C_{17} = -\frac{2.k_{Q_3}.\rho.D^5.\Omega_{30}}{I_B^{zz}}$$

$$C_{18} = \frac{2 \cdot k_{Q_4} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{40}}{I_B^{zz}}$$

$$C_{19} = -\frac{1}{T_{m_1}}$$

$$C_{20} = \frac{K_{m_1}}{T_{m_1}}$$

$$C_{21} = -\frac{1}{T_{m_2}}$$

$$C_{22} = \frac{K_{m_2}}{T_{m_2}}$$

$$C_{23} = -\frac{1}{T_{m_3}}$$

$$C_{24} = \frac{K_{m_3}}{T_{m_3}}$$

$$C_{25} = -\frac{1}{T_{m_4}}$$

$$C_{26} = \frac{K_{m_4}}{T_{m_4}}$$

Dessa forma, é possível definir o vetor de estado x , bem como sua derivada $\dot{x}$ como se segue

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ p \\ q \\ r \\ \Delta\Omega_1 \\ \Delta\Omega_2 \\ \Delta\Omega_3 \\ \Delta\Omega_4 \end{bmatrix} \quad (14.12)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 \\ \dot{\Omega}_4 \end{bmatrix} \quad (14.13)$$

Vale ressaltar que o estado completo do sistema, segundo o modelo dinâmico inicialmente proposto, é composto pelas 16 variáveis de estado originais. O que se fez aqui foi apenas uma simplificação que permite diminuir a carga computacional, ao monitorar somente as variáveis de estado essenciais para o sistema de controle.

No protótipo a ser construído serão embarcados dois sensores: um acelerômetro de três eixos e um giroscópio de três eixos, tornando-se possível monitorar as coordenadas da velocidade angular p , q e r , e da posição angular ϕ e θ . Assim, como o vetor de saída $\mathbf{y}$ representa as variáveis de estado que são efetivamente medidas por meio do sistema de sensoriamento, este será dado por

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

O vetor de entrada de controle $\mathbf{u}$ representa os sinais de controle enviados aos atuadores, que por sua vez agirão fisicamente sobre o sistema. Assim, uma vez que os atuadores do sistema em questão são os motores elétricos acionados pelos respectivos ESCs, os quais, por sua vez, são comandados pelos sinais de controle u_i , tem-se que o vetor de entrada de controle $\mathbf{u}$ fica naturalmente definido por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta u_4 \end{bmatrix} \quad (14.15)$$

A obtenção das matrizes A e B não é imediata, devido ao acoplamento entre as equações que pode ser observado na equação 14.7. Assim, para contornar esse problema, pode-se fazer

$$\begin{aligned} L \cdot \dot{x} &= M \cdot x + N \cdot u \\ \rightarrow \dot{x} &= L^{-1} \cdot M \cdot x + L^{-1} \cdot N \cdot u \end{aligned} \quad (14.16)$$

onde as matrizes L , M e N são dadas por, respectivamente,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 0 & 0 & C_6 & 0 & 0 & C_7 & C_8 & C_9 & C_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{25} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{26} \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de estado A pode ser obtida a partir da operação

$$A = L^{-1} \cdot M \quad (14.17)$$

e a matriz de entrada de controle B a partir da operação

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{N} \quad (14.18)$$

As matrizes de saída $\mathbf{C}$ e de transmissão direta $\mathbf{D}$, são obtidas por inspeção direta

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se demonstrar que a solução de uma equação de estado na forma da equação 14.1 com instante inicial t_0 , é dada por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) \cdot d\tau \quad (14.19)$$

onde

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot t + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 \cdot t^3}{3!} + \dots \quad (14.20)$$

é a matriz de transição.

Para as simulações computacionais do comportamento dinâmico do quadricóptero através da solução anterior, pode-se utilizar o seguinte algoritmo

$$\Phi = \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \Delta t + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot \Delta t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 \cdot \Delta t^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n \cdot \Delta t^n}{n!} \quad (14.21)$$

$$\Gamma = \mathbf{I} \cdot \Delta t + \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2 \cdot \Delta t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3 \cdot \Delta t^4}{4!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n \cdot \Delta t^{n+1}}{(n+1)!} \quad (14.22)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \cdot \mathbf{x}(k) + \Gamma \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(k) \quad (14.23)$$

onde Δt é um intervalo de tempo uniforme, n representa o número de termos da série, Φ é a matriz de transição e Γ é a matriz relativa ao termo forçante.

15 SENSORIAMENTO

Para a determinação da orientação do quadricóptero segundo o plano horizontal bem como para a obtenção das componentes da sua velocidade angular, serão utilizados dois sensores: um acelerômetro digital de três eixos e um giroscópio digital de três eixos. As grandezas diretamente obtidas desses dispositivos são a aceleração $\mathbf{a}_{B_k}$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{B_k}$, apresentadas a seguir

$$\mathbf{a}_{B_k} = \begin{bmatrix} a_{x_k} \\ a_{y_k} \\ a_{z_k} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{B_k} = \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{bmatrix}$$

Observe que o índice k indica a k – ésima leitura, explicitando o caráter discreto da operação desses dispositivos.

Embora seja possível obter a velocidade angular do quadricóptero diretamente a partir da leitura do giroscópio, o mesmo não se pode dizer para os ângulos ϕ e θ , que indicam o desvio da aeronave segundo o plano horizontal.

Em tese, com base nos sensores utilizados seria possível obter as medidas dos ângulos ϕ e θ de duas formas independentes: através da integração das componentes da velocidade angular fornecida pelo giroscópio, ou ainda através da avaliação da direção do campo gravitacional segundo os eixos do acelerômetro.

No entanto, o que se observa na prática é que o acelerômetro é altamente susceptível às vibrações induzidas pelo funcionamento dos motores elétricos, bem como por desbalanceamentos dos rotores, o que produz um elevado nível de ruído no sinal obtido. Além disso, eventuais acelerações laterais do quadricóptero acabam dificultando a determinação da real direção do campo gravitacional em relação aos eixos do sensor.

Já o giroscópio, embora seja pouco sensível às vibrações que corrompem o sinal do acelerômetro, possui *offsets* naturais difíceis de serem anulados que acabam por indicar velocidades angulares diferentes de zero, mesmo quando o

sensor é mantido em repouso. Associado a esse fato, erros numéricos durante a integração das componentes da velocidade angular fazem com que as posições angulares obtidas desta forma apresentem um desvio variável em relação aos valores reais.

Assim, para minimizar os efeitos anteriores, as posições angulares ϕ e θ serão determinadas combinando-se os sinais de ambos os sensores, através da implementação do Filtro de Kalman.

Considere as expressões 15.1 e 15.2 representando, respectivamente, a equação do processo discreto com excitação externa $\mathbf{u}$ pelo qual passa o estado $\mathbf{x}$, e a equação da medição a partir da qual se obtém a medida $\mathbf{z}$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{k-1} \quad (15.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (15.2)$$

As matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ são análogas às matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente, apresentadas na seção 14, porém neste caso para um processo discreto. Já os vetores $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ representam os ruídos do processo e da medição, respectivamente.

Um algoritmo que permite a obtenção de uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}_k$ do estado $\mathbf{x}_k$ a partir da medida $\mathbf{z}_k$, através da utilização do Filtro de Kalman, é apresentado a seguir

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_k \quad (15.3)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{k-1} \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (15.4)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (15.5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (15.6)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{P}_k^- \quad (15.7)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ é a estimativa *a priori* do estado futuro obtida a partir do modelo do processo, da estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ anterior e da excitação externa $\mathbf{u}_k$, $\hat{\mathbf{x}}_k$ é a estimativa *a posteriori* do estado obtida a partir de $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ e da medida $\mathbf{z}_k$, $\mathbf{Q}$ é a matriz de covariância do ruído do processo, $\mathbf{R}$ é a matriz de covariância do ruído da medição, $\mathbf{P}_k^-$ é a matriz de covariância relativa ao erro $\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$ da estimativa *a priori*, $\mathbf{P}_k$ é a matriz de covariância relativa ao erro $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ da estimativa *a posteriori*, e $\mathbf{K}_k$ é a matriz de ganho que pondera a influência da estimativa *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ e da medida $\mathbf{z}_k$

na obtenção da estimativa *a posteriori* $\hat{x}_k$, minimizando P_k (WELCH; BISHOP, 2001).

Assim, para a obtenção de uma estimativa do ângulo de rolagem $\hat{\phi}_k$ utilizando-se o Filtro de Kalman, pode-se utilizar o algoritmo

$$\hat{\phi}_k^- = \hat{\phi}_{k-1} + p_k \cdot (t_k - t_{k-1}) \quad (15.8)$$

$$P_{\phi_k}^- = P_{\phi_{k-1}} + Q_{\phi} \quad (15.9)$$

$$K_{\phi_k} = \frac{P_{\phi_k}^-}{P_{\phi_k}^- + R_{\phi}} \quad (15.10)$$

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_k^- + K_{\phi_k} \cdot \left(\text{atan} \left(\frac{a_{y_k}}{a_{z_k}} \right) - \hat{\phi}_k^- \right) \quad (15.11)$$

$$P_{\phi_k} = (1 - K_{\phi_k}) \cdot P_{\phi_k}^- \quad (15.12)$$

e analogamente para o ângulo de arfagem $\hat{\theta}_k$

$$\hat{\theta}_k^- = \hat{\theta}_{k-1} + q_k \cdot (t_k - t_{k-1}) \quad (15.13)$$

$$P_{\theta_k}^- = P_{\theta_{k-1}} + Q_{\theta} \quad (15.14)$$

$$K_{\theta_k} = \frac{P_{\theta_k}^-}{P_{\theta_k}^- + R_{\theta}} \quad (15.15)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k^- + K_{\theta_k} \cdot \left(\text{atan} \left(-\frac{a_{x_k}}{a_{z_k}} \right) - \hat{\theta}_k^- \right) \quad (15.16)$$

$$P_{\theta_k} = (1 - K_{\theta_k}) \cdot P_{\theta_k}^- \quad (15.17)$$

Note que as estimativas *a priori* $\hat{\phi}_k^-$ e $\hat{\theta}_k^-$ são obtidas pela integração das componentes da velocidade angular fornecidas pelo giroscópio, ao passo que as estimativas *a posteriori* $\hat{\phi}_k$ e $\hat{\theta}_k$ são obtidas a partir das estimativas *a priori* e das medidas dos ângulos calculadas a partir das leituras a_{x_k} , a_{y_k} e a_{z_k} do acelerômetro. Evidentemente, as medidas da posição angular a serem utilizadas no sistema de controle do quadricóptero a ser desenvolvido são as estimativas *a posteriori* $\hat{\phi}_k$ e $\hat{\theta}_k$.

Vale ressaltar que para que seja possível o cálculo dos ângulos ϕ e θ aplicando-se funções trigonométricas inversas às componentes da aceleração, considera-se a hipótese de pequenos deslocamentos angulares. Adicionalmente,

considera-se que o ruído no sinal do acelerômetro possui média nula, bem como as trajetórias a serem percorridas pelo quadricóptero, na média, resultam em acelerações laterais nulas. Note que se o quadricóptero permanecer por longos períodos de tempo com aceleração lateral não nula, a direção real do campo gravitacional não poderá ser estimada sem a incorporação de outros sistemas de sensoriamento.

16 SELEÇÃO DOS COMPONENTES

16.1 Rotores

Considerando-se inicialmente que o protótipo possui a massa máxima especificada de 2 kg , buscou-se um conjunto de rotores que, quando combinados, sejam capazes de gerar o empuxo de $1,5 X$ o peso da aeronave. Dessa forma, o empuxo máximo de cada rotor deve ser igual ou maior que

$$\text{empuxo máximo por rotor} = \frac{1,5 \times 2\text{ kgf}}{4} = 0,75\text{ kgf}$$

Dada a limitada quantidade de informações técnicas disponíveis sobre os rotores para multirotores atualmente em comercialização, foi necessário fazer a seleção destes de forma indireta com base nas informações presentes em manuais de instruções de motores elétricos para aeromodelos. Assim, consultando-se o manual dos motores da série D2836 do fabricante *Turnigy* (TURNIGY D2836, 2014), verificou-se que um rotor de diâmetro nominal 11 in ($279,4\text{ mm}$) e passo 7 in ($177,8\text{ mm}$) ou diâmetro 7 in ($177,8\text{ mm}$) e passo 3 in ($76,2\text{ mm}$) (não foi especificado ao certo qual dos dois tipos), quando acoplado a um motor modelo D2836-8, pode gerar um empuxo de até $1,13\text{ kgf}$.

Com base nessas informações, foram adquiridos quatro rotores, dois para o sentido de rotação horário e dois para o sentido anti-horário, com diâmetros nominais 10 in (254 mm) e passos $4,5\text{ in}$ ($114,3\text{ mm}$). O fabricante destes rotores bem como dados adicionais quanto às suas características de empuxo e arrasto são desconhecidos.

A figura 16.1 mostra os rotores adquiridos para serem utilizados no protótipo.



Figura 16.1 – Rotores utilizados

16.2 Motores

Para manter a coerência entre as escolhas dos rotores e dos motores, optou-se por utilizar quatro motores do modelo D2836-8 fabricados pela *Turnigy*, o mesmo modelo de cujo manual foram obtidas as informações de empuxo que orientaram a escolha dos rotores. As especificações nominais desse motor fornecidas pelo fabricante são listadas a seguir (TURNIGY D2836, 2014):

- Tensão de alimentação nominal: $7,4 \sim 11,1 V$
- Ganho de rotação (KV): $1120 \text{ rpm}/V$
- Empuxo máximo: $1,13 \text{ kgf}$
- Massa: 70 g
- Diâmetro e comprimento da carcaça: $28 \times 36 \text{ mm}$
- Diâmetro e comprimento do eixo: $4,0 \times 49 \text{ mm}$
- Potência máxima: $336 W$
- Capacidade de fornecimento de corrente recomendado para o ESC: $40 A$
- Recomendação de associação entre baterias e hélices: $LiPox2/11 \times 7$ ou $LiPox4/7 \times 3$

A figura 16.2 mostra um dos motores utilizados.

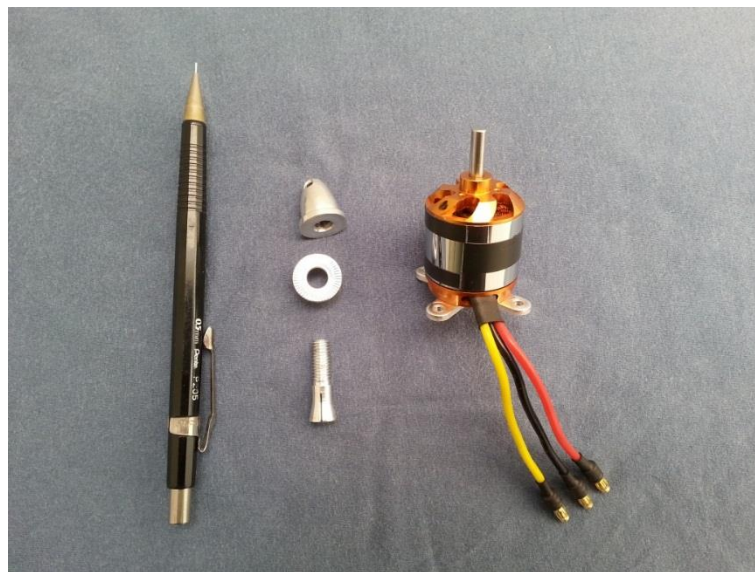


Figura 16.2 – Um dos motores utilizados

16.3 ESCs

Os motores elétricos a serem utilizados no protótipo são do tipo sem escova ou *brushless*, de modo que, para o seu correto funcionamento, é necessária a utilização de um controlador eletrônico de velocidade ou ESC (do inglês *Electronic Speed Controller*). O ESC fornece ao motor uma tensão alternada através de um circuito de potência, de acordo com o sinal digital de controle recebido de um receptor de rádio controle ou, como no caso em questão, de um microcontrolador embarcado. A energia utilizada para a alimentação do motor provém de uma bateria de corrente contínua.

Assim, seguindo-se a recomendação do manual dos motores escolhidos, optou-se por utilizar quatro ESCs do modelo PLUSH-30A fabricados pela *Turnigy*. As especificações nominais desses ESCs fornecidas pelo fabricante são listadas a seguir (TURNIGY PLUSH, 2014):

- Corrente constante: 30 A
- Corrente de pico: 40 A
- Modo BEC: Linear
- Saída de BEC: 5 V/2 A
- Baterias: 2 ~ 4 cél. para baterias *Li – ion* e *Li – poly* ou 5 ~ 12 cél. para baterias *NiMH* e *NiCd*

- Interfaces digitais: *PPM* ou *PWM*
- Tensão de referência lógica: $V_{LOGIC} = 4,5 \sim 6,5 \text{ V}$
- Programação pelo usuário: disponível
- Massa: 25 g
- Dimensões: 55 × 25 × 9 mm

BEC é a sigla em inglês para Circuito de Eliminação de Bateria, circuito presente no ESC que permite alimentar o receptor bem como outros dispositivos através da bateria principal.

A figura 16.3 mostra um dos ESCs utilizados.

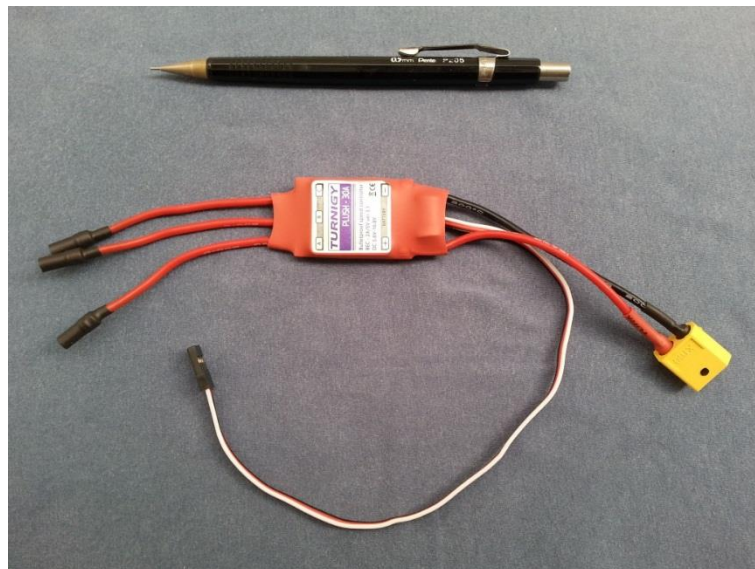


Figura 16.3 – Um dos ESCs utilizados

16.4 Bateria

A elevada potência máxima consumida pelos motores elétricos associada à baixa tensão de alimentação resulta na circulação de uma elevada corrente, de modo que baterias de elevada capacidade de descarga precisam ser utilizadas.

Assim optou-se pela utilização de 4 baterias modelo Nano-Tech 2200 mAh 3S 25~50C LiPo Pack, fabricadas pela Turnigy. As especificações nominais dessas baterias fornecidas pelo fabricante são listadas a seguir (TURNIGY NANO-TECH, 2014):

- Capacidade de carga: 2200 mAh
- Tensão nominal: 11,1 V (3 células)
- Corrente de descarga constante: 25 A
- Corrente descarga de pico: 50 A
- Massa: 175 g
- Corrente de carga máxima: 5 A
- Conector para balanceamento das células: JST-XH
- Conector de descarga: XT60
- Dimensões: 106 × 35 × 24 mm

A figura 16.4 mostra uma das baterias utilizadas.

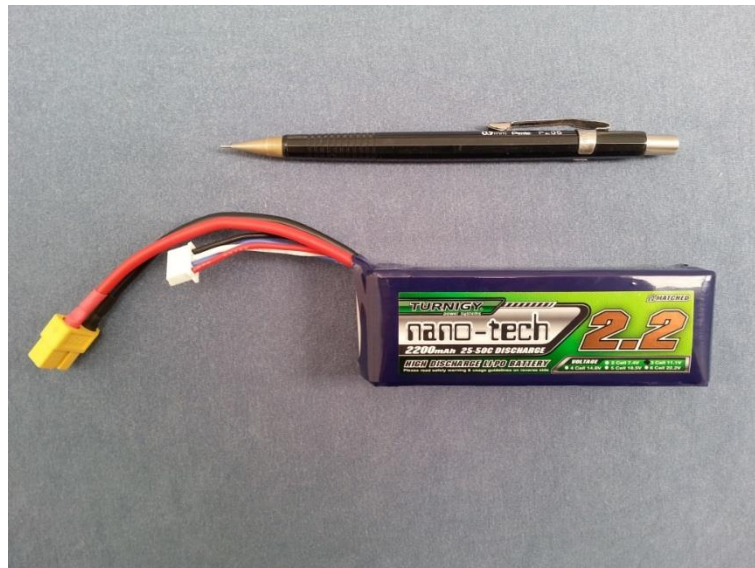


Figura 16.4 – Uma das baterias utilizadas

16.5 Transmissor e receptor

Para que um piloto em terra possa comandar os movimentos do quadricóptero durante o voo são necessários quatro canais de comando provenientes de dois joysticks analógicos bidirecionais:

- Joystick direito – Canal 1

O movimento horizontal da alavanca, com retorno automático à posição neutra, controla do movimento de rolagem.

- Joystick direito – Canal 3

O movimento vertical da alavanca, com retorno automático à posição neutra, controla do movimento de arfagem.

- Joystick esquerdo – Canal 4

O movimento horizontal da alavanca, com retorno automático à posição neutra, controla do movimento de guinada.

- Joystick esquerdo – Canal 2

O movimento vertical da alavanca, sem retorno automático à posição neutra, controla o acelerador.

Canais adicionais, embora não sejam essenciais, podem vir a ser úteis para a adição de comandos extras, como por exemplo:

- Comando de liga e desliga para os motores elétricos;
- Comando para que o protótipo permaneça em voo pairado;
- Escolha do modo de pilotagem entre proporcional aos ângulos de rolagem e arfagem ou proporcional às respectivas velocidades angulares;
- Ajuste ou escolha *in flight* dos ganhos de controle para dar ao protótipo um comportamento mais agressivo e ágil ou um comportamento mais estável com respostas mais sutis.

Para a implementação das funcionalidades descritas optou-se pela utilização do transmissor Turnigy 9X 9Ch, acompanhado do módulo Turnigy RF9X-V2 e do receptor Turnigy 9X8C-V2. As especificações técnicas básicas desse sistema são listadas a seguir (TURNIGY 9X, 2010):

- Classe do sinal de rádio: 2,4 GHz
- Número de canais: 8 canais em modo *PPM* ou 9 canais em modo *PCM*
- Número de joysticks bidirecionais analógicos: 2
- Interfaces digitais: *PPM* ou *PCM*
- Tensão de referência lógica do receptor: $V_{LOGIC} = 4,5 \sim 6,5 V$

Para informações mais detalhadas, sugere-se a consulta do manual do usuário correspondente (TURNIGY 9X, 2010).

As figuras 16.5 e 16.6 mostram, respectivamente, o transmissor Turnigy 9X 9Ch e o receptor Turnigy 9X8C-V2.



Figura 16.5 – Transmissor Turnigy 9X 9Ch

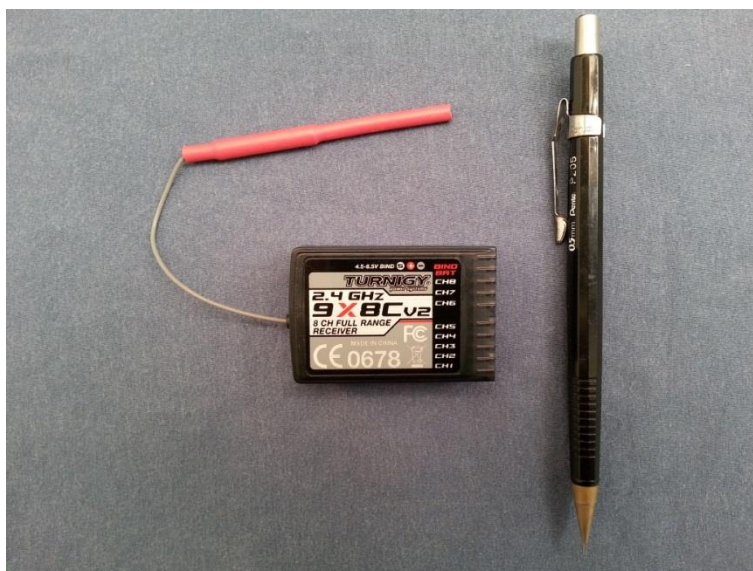


Figura 16.6 – Receptor Turnigy 9X8C-V2

16.6 Acelerômetro

Conforme explicado anteriormente, será necessária a utilização combinada de um acelerômetro digital de três eixos juntamente com um giroscópio digital, também de três eixos, para a avaliação das posições angulares ϕ e θ do quadricóptero.

Assim, foi escolhido para o projeto o acelerômetro BMA180 produzido pela Bosch. As especificações técnicas básicas desse sensor fornecidas pelo fabricante são listadas a seguir (BOSCH, 2010):

- Tipo: acelerômetro triaxial com sensor de temperatura integrado
- Resolução programável: 12 ou 14 *bits*
- Interfaces digitais: *SPI* ou *I²C*, com pino de interrupção
- Amplitudes de medição programáveis: 1*g*, 1,5*g*, 2*g*, 3*g*, 4*g*, 8*g* e 16*g*
- Filtros passa-baixos programáveis: 10, 20, 40, 75, 150, 300, 600 e 1200 *Hz*
- Filtro passa-alto programável: 1 *Hz*
- Filtro passa-banda programável: 0,2 ~ 300 *Hz*
- Corrente de alimentação típica: $I_{DD} = 0,5 \sim 975 \mu A$
- Tensão de alimentação: $V_{DD} = 1,62 \sim 3,6 V$
- Tensão de referência lógica: $V_{DDIO} = 1,2 \sim 3,6 V$
- Temperatura de operação: $T_{op} = -40^{\circ}C \sim 85^{\circ}C$
- Taxa de amostragem efetiva: 2400 *Hz* (Modo baixo ruído) ou 1200 *Hz* (Modo baixo consumo de energia)
- Erro de alinhamento dos eixos relativo às superfícies externas do encapsulamento: $\pm 1,0^{\circ}$

Para informações mais detalhadas sugere-se a consulta do *datasheet* correspondente (BOSCH, 2010).

A figura 16.7 mostra o sensor BMA180 utilizado.

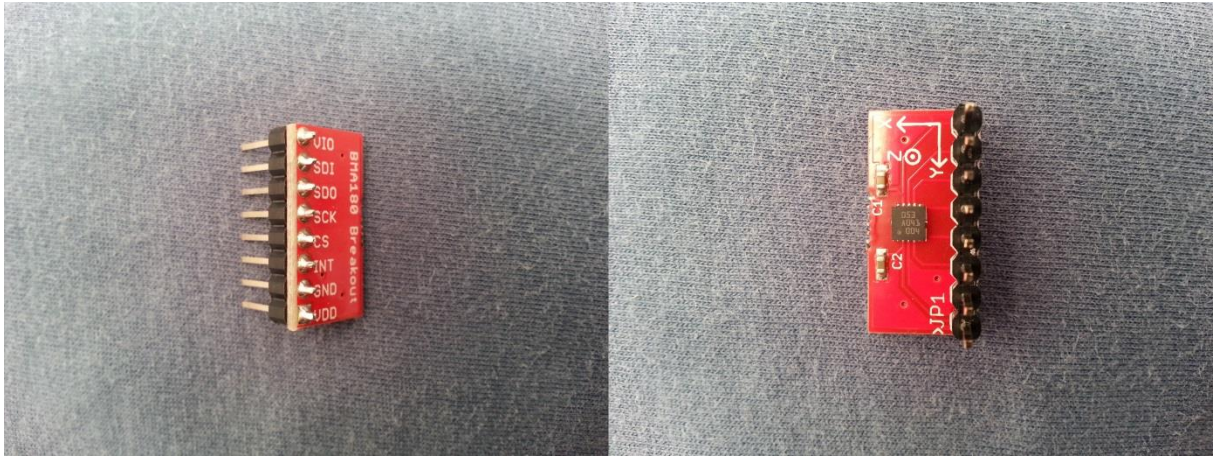


Figura 16.7 – Sensor BMA180 utilizado

16.7 Giroscópio

Além de contribuir na obtenção da posição angular do quadricóptero, o giroscópio digital de três eixos a ser utilizado também fornecerá diretamente as três componentes da velocidade angular da aeronave.

Assim, foi escolhido para o projeto o giroscópio ITG3205 produzido pela InvenSense. As especificações técnicas básicas desse sensor fornecidas pelo fabricante são listadas a seguir (INVENSENSE, 2010):

- Tipo: giroscópio triaxial com sensor de temperatura integrado
- Resolução: 16 *bits*
- Interfaces digitais: I^2C
- Amplitude de medição: $\pm 2000^\circ/s$
- Filtros passa-baixos programáveis: 5, 10, 20, 42, 98, 188 e 256 *Hz*
- Corrente de alimentação típica: $I_{DD} = 5\ \mu A \sim 6,5\ mA$
- Tensão de alimentação: $V_{DD} = 2,1 \sim 3,6\ V$
- Tensão de referência lógica: $V_{LOGIC} = 1,71 \sim V_{DD}\ V$
- Temperatura de operação: $T_{op} = -40^\circ C \sim 85^\circ C$
- Taxa de amostragem efetiva: 3,9 $\sim 8000\ Hz$

Para informações mais detalhadas sugere-se a consulta do *datasheet* correspondente (INVENSENSE, 2010).

A figura 16.8 mostra o sensor ITG3205 utilizado.



Figura 16.8 – Sensor ITG3205 utilizado

16.8 Tacômetro

Embora o sistema de controle embarcado a ser implementado não requeira a medida direta das rotações dos motores durante o seu funcionamento, a calibração desse sistema necessitará de parâmetros dinâmicos que envolvem as referidas rotações. Assim, para facilitar a realização de ensaios, será incorporado no quadricóptero um sistema de tacômetros que permitirão a leitura individual da rotação de cada um dos quatro motores.

O princípio de funcionamento desse sistema requer um sensor de refletância analógico fixado próximo à carcaça girante do motor, capaz de diferenciar o nível de reflexão entre o acabamento cromado da carcaça e uma fita isolante cobrindo metade da sua circunferência. Dessa forma, abastecendo a entrada do sensor com uma tensão equivalente ao nível lógico alto (3,3 V para o microcontrolador a ser utilizado), a sua saída irá variar entre os níveis alto e baixo, conforme a superfície coberta pela fita isolante preta ou a superfície cromada, respectivamente, estiverem a sua frente. Vale ressaltar que a ligação da saída analógica do sensor em questão diretamente à entrada digital do microcontrolador só produz resultados satisfatórios se a diferença entre os níveis de refletância das superfícies forem suficientemente grandes, de forma a produzir uma onda com rampas ascendentes e descendentes nítidas, e patamares em níveis lógicos altos e baixos. Também, deve-se observar se a taxa de amostragem do sensor utilizado é suficiente para a rotação a ser medida e para o número de faixas refletoras e não refletoras a serem detectadas por volta.

De posse das sequências de sinais altos e baixos resultantes das rotações dos motores, torna-se possível implementar no microcontrolador um código baseado em interrupções que mede os tempos entre duas rampas ascendentes ou descendentes de cada sinal e, a partir destes períodos, obtém as rotações dos motores.

Para a seleção do sensor de refletância mais adequado, avaliou-se inicialmente a rotação máxima a ser medida. Sendo o ganho de rotação do motor dado pelo fabricante $KV = 1120 \text{ rpm/V}$, e a tensão em uma das baterias medida com um multímetro Minipa ET-2075B dada por $E = 12,55 \text{ V}$, tem-se que a rotação máxima nominal do motor em vazio é

$$n_{max} = KV \cdot E = 14056 \text{ rpm}$$

Para a verificação do valor acima, realizou-se um ensaio simples onde acionou-se em rotação máxima o conjunto formado por um motor, um ESC e a bateria cuja tensão foi avaliada, medindo-se a rotação do motor em vazio com um tacômetro óptico Minipa MDT-2244B. O resultado obtido foi

$$n_{max,empírico} = 13986 \text{ rpm}$$

A diferença percentual entre os valores é dada por

$$ERRO_{\%,n} = 100 \frac{n_{max,empírico} - n_{max}}{n_{max,empírico}} = -0,5 \%$$

de modo que os valores teóricos e empíricos são satisfatoriamente próximos.

Com base em n_{max} , e considerando-se a utilização de uma faixa de fita isolante preta cobrindo metade da circunferência cromada da carcaça rotativa do motor, tem-se que a frequência máxima a ser medida (frequência do aumento ou diminuição de refletância) é

$$f_{max} = \frac{n_{max}}{60} = 234 \text{ Hz}$$

Em seguida, sendo t o tempo de subida ou descida da rampa do sinal de refletância medido, e considerando-se patamares em nível alto e baixo com duração de $10 \cdot t$ para garantir a nitidez do sinal, pode-se igualar a frequência máxima f_{max} ao inverso da soma do tempo de subida da rampa, mais o tempo em que o sinal permanece no patamar alto (nível lógico alto), mais o tempo de descida da rampa, mais o tempo em que o sinal permanece no patamar baixo (nível lógico baixo), ou seja,

$$f_{max} = \frac{1}{t + 10 \cdot t + t + 10 \cdot t}$$

Resolvendo-se a expressão anterior para t , e substituindo-se o valor de f_{max} , obtém-se que

$$t = \frac{1}{22 \cdot f_{max}} = 194 \mu s$$

ou seja, o tempo de subida ou descida da rampa do sinal de refletância medido deve ser igual ou menor do que $194 \mu s$.

A partir do valor anterior, optou-se pela utilização de quatro sensores de refletância QTR-1A produzidos pela Pololu. As especificações nominais básicas desses sensores fornecidas pelo fabricante são listadas a seguir (POLOLU, 2014):

- Dimensões sem os pinos para conexão: $12,7 \times 7,62 \times 2,54 \text{ mm}$
- Tensão de alimentação típica: $V_{in} = 5 \text{ V}$
- Corrente de alimentação: $I = 17 \text{ mA}$
- Tipo de saída: tensão analógica entre 0 V e V_{in}
- Distância ótima entre o sensor e a superfície a ser avaliada: 3 mm
- Distância máxima recomendada entre o sensor e a superfície a ser avaliada: 6 mm
- Massa sem os pinos para conexão: $0,2 \text{ g}$
- Tempo de subida ou descida de rampa do sinal da refletância medido: $t_r = t_f = 20 \mu s$

A medida do tempo de subida ou descida de rampa do sinal da refletância informada acima foi tomada com $V_{in} = 5 \text{ V}$, $I = 100 \mu A$, $R_L = 1 \text{ k}\Omega$, utilizando-se

como superfície refletora uma chapa de liga de alumínio espelhada a uma distância de 1 mm (FAIRCHILD, 2008).

Para informações mais detalhadas sobre o LED infravermelho e o fototransistor que compõem o referido sensor de refletância, sugere-se a consulta do *datasheet* correspondente (FAIRCHILD, 2008).

Com relação à diferença na refletividade entre a superfície cromada e a superfície da fita isolante preta, procedeu-se com um ensaio simples onde o sensor de refletividade foi posicionado a uma distância de 3 mm de cada uma dessas superfícies e alimentado com uma tensão de entrada $V_{in} = 3,3 V$. Utilizando um multímetro Minipa ET-2075B, obteve-se que a tensão de saída correspondente à superfície cromada foi $V_{out} = 0,2 V$, ao passo que para a superfície da fita isolante preta a tensão de saída foi $V_{out} = 2,8 V$. Uma vez que o padrão de nível lógico CMOS em 3,3 V usado pelo Arduino DUE interpreta uma tensão de 2 V a 3,3 V como nível alto e uma tensão de 0 a 0,8 V como nível baixo (SPARKFUN LOGIC LEVELS, 2014), tem-se que a ligação direta da saída analógica do sensor de refletância a uma entrada digital do microcontrolador é possível.

A figura 16.9 mostra um dos sensores de refletância utilizados fixado ao suporte de alumínio responsável pela manutenção da distância correta entre o sensor e a superfície girante do motor.



Figura 16.9 – Um dos sensores de refletância utilizados

16.9 Microcontrolador

A escolha do microcontrolador mais indicado para o projeto em questão foi feita observando-se a adequação de suas interfaces de entrada e saída para a comunicação com os diversos dispositivos que precisarão ser conectados, bem como a sua capacidade de processamento e de memória, no sentido de permitir que o código de controle embarcado seja carregado por completo, e executado numa frequência adequada.

Abordando-se primeiramente a questão das interfaces de entrada e saída, tem-se a situação apresentada na tabela 16.1.

Tabela 16.1 – Dispositivos a serem conectados

Dispositivo	QTD.	Tipo de interface	Número de pinos lógicos por dispositivo	Número total de pinos lógicos
ESC Turnigy PLUSH-30A	4	<i>PPM</i> ou <i>PWM</i>	1	4
Receptor Turnigy 9X8C-V2	1	<i>PPM</i> ou <i>PCM</i>	9	9
Acelerômetro BMA180	1	I^2C	2	2
Giroscópio ITG3205	1	I^2C	2	2
Sensor de refletância QTR-1A	4	<i>I/O Digital</i>	1	4

Lembrando-se que os dispositivos com interface serial I^2C compartilham os mesmos dois pinos (*SDA* e *SCL*), tem-se que o número e o tipo dos pinos lógicos necessários para a conexão de todos os dispositivos listados na tabela 16.1 é

- 4 pinos com saída *PWM*
- 9 pinos com entrada *PPM*
- 2 pinos para interface serial I^2C (*SDA* e *SCL*)
- 4 pinos com entrada digital

Com relação à capacidade de processamento e de memória necessária para o microcontrolador, é difícil no atual estágio de desenvolvimento do trabalho estimar, ainda que de forma grosseira, os requisitos necessários. Assim, utilizou-se como

base para a escolha os resultados obtidos por pesquisadores e entusiastas em projetos similares. Por exemplo, o membro do Fórum Arduino baselsw, utilizou com sucesso um microcontrolador ATmega32U4 (arquitetura 8 – *bit* AVR, clock do CPU 16 MHz, memória SRAM de 2,5 KB e memória flash de 32 KB) para a implementação de um código de controle baseado em *PID* para a estabilização do voo de um quadricóptero (ARDUINO FORUM, 2014).

Assim, com base nas considerações anteriores, optou-se por utilizar no presente trabalho um microcontrolador Atmel SAM3X8E ARM Cortex-M3 CPU, presente na placa de desenvolvimento Arduino DUE. A seguir são listadas as especificações básicas do Arduino DUE (ARDUINO DUE, 2014):

- CPU: Atmel SAM3X8E ARM Cortex-M3 CPU
- Arquitetura: 32 – *bit* ARM
- Clock do CPU: 84 MHz
- Memória SRAM: 96 KBytes
- Memória flash para código: 512 KBytes
- Tensão de referência lógica: $V_{LOGIC} = 3,3 V$
- Tensão de entrada recomendada: $V_{IN} = 7 \sim 12 V$
- Tensão de entrada limite: $V_{IN,MAX} = 6 \sim 16 V$
- Entradas e saídas digitais: 54 pinos, 12 dos quais podem ser usados como saídas *PWM*
- Entradas analógicas: 12 pinos
- Saídas analógicas: 2 pinos (DAC)
- Corrente DC máxima combinada em todos os pinos de I/O digitais ou analógicas: 130 mA
- Corrente DC máxima no pino de alimentação de 3,3 V: 800 mA
- Corrente DC máxima no pino de alimentação de 5 V: 800 mA

Para informações mais detalhadas sobre a placa de desenvolvimento sugere-se a consulta da *home page* dedicada ao Arduino DUE (ARDUINO DUE, 2014). Já para informações mais detalhadas sobre o microcontrolador, sugere-se a consulta do seu *datasheet* (ATMEL, 2012).

De uma forma geral, a escolha da plataforma Arduino traz diversas vantagens:

- Ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) simples e objetivo;
- Simplicidade de programação através das linguagens C e C++;
- Existência de diversas bibliotecas nativas, o que simplifica a execução de diversas tarefas e a integração de diferentes dispositivos;
- Compatibilidade com diversos dispositivos eletrônicos como sensores, receptores de rádio controle, servos e ESCs;
- Existência de uma grande comunidade mundial de usuários com diversos fóruns para troca de informações;
- Relativo baixo custo e facilidade de aquisição.

A figura 16.10 mostra o Arduino DUE utilizado.

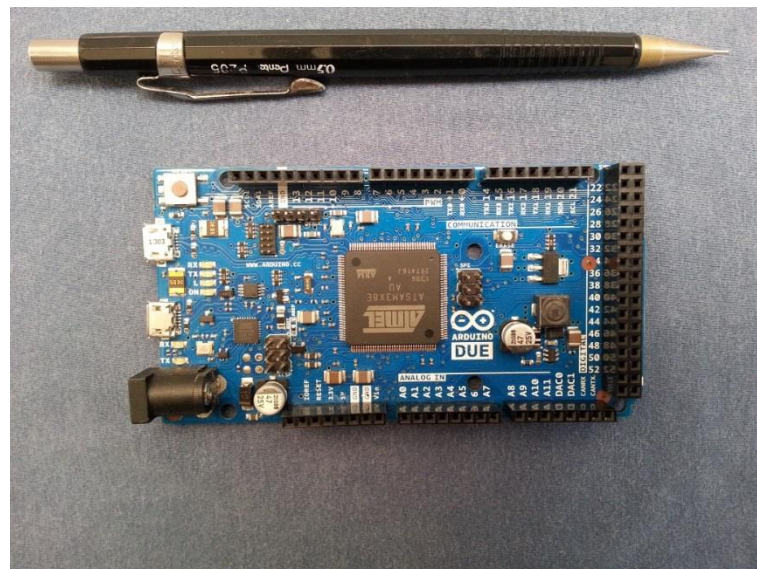


Figura 16.10 – Arduino DUE utilizado

16.10 Conversor de nível lógico

Analisando-se as especificações do ESC Turnigy PLUSH-30A e do Receptor Turnigy 9X8C-V2, pode-se observar que a tensão de referência lógica de ambos é $V_{LOGIC} = 4,5 \sim 6,5 V$, ao passo que o Arduino DUE opera com $V_{LOGIC} = 3,3 V$. Por conta dessa diferença nas tensões, torna-se necessária a utilização de conversores de nível lógicos.

Para o projeto em questão foi escolhido o conversor de nível lógico produzido pela Sparkfun. As especificações técnicas básicas desse dispositivo podem ser

encontradas na *home page* correspondente (SPARKFUN USING THE LOGIC LEVEL CONVERTER, 2014).

A figura 16.11 mostra o conversor de nível lógico utilizado.

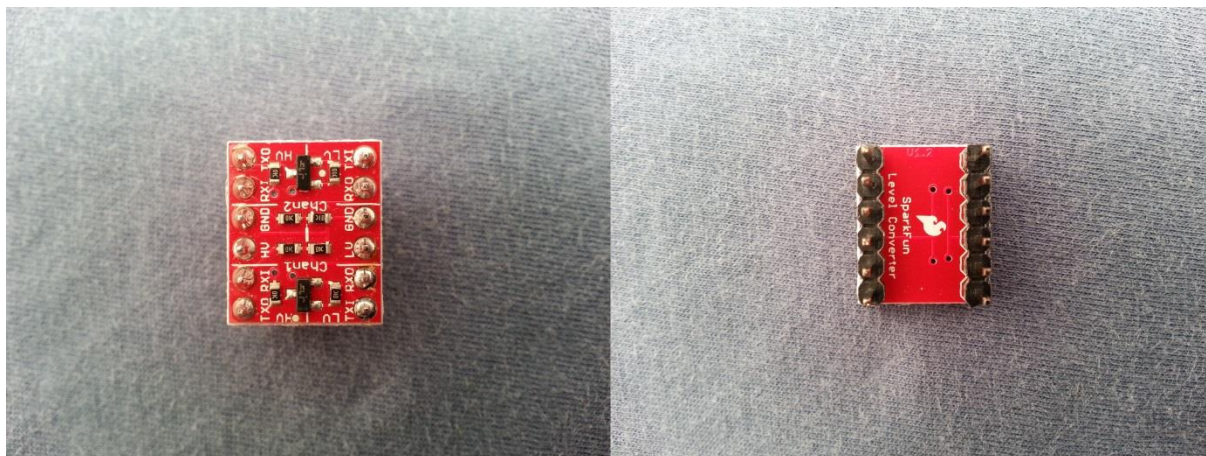


Figura 16.11 – Conversor de nível lógico utilizado

17 PROJETO DO PROTÓTIPO

17.1 Características gerais

A estrutura para o suporte mecânico dos diversos componentes do protótipo foi concebida visando o emprego de matérias-primas de fácil aquisição e baixo custo, bem como a utilização de técnicas simples de fabricação e montagem, de forma a permitir a execução de modificações e reparos em um ambiente domiciliar.

Os elementos básicos da estrutura correspondem aos braços dispostos em “X” mostrados na figura 17.1. Esses braços serão feitos de chapas de madeira do tipo Cedro, com 3 mm de espessura. Para que o encaixe mostrado na figura 17.1 seja possível, serão feitas fendas de 3 mm de largura no meio de cada uma das chapas, porém em uma delas na metade superior e na outra na metade inferior.

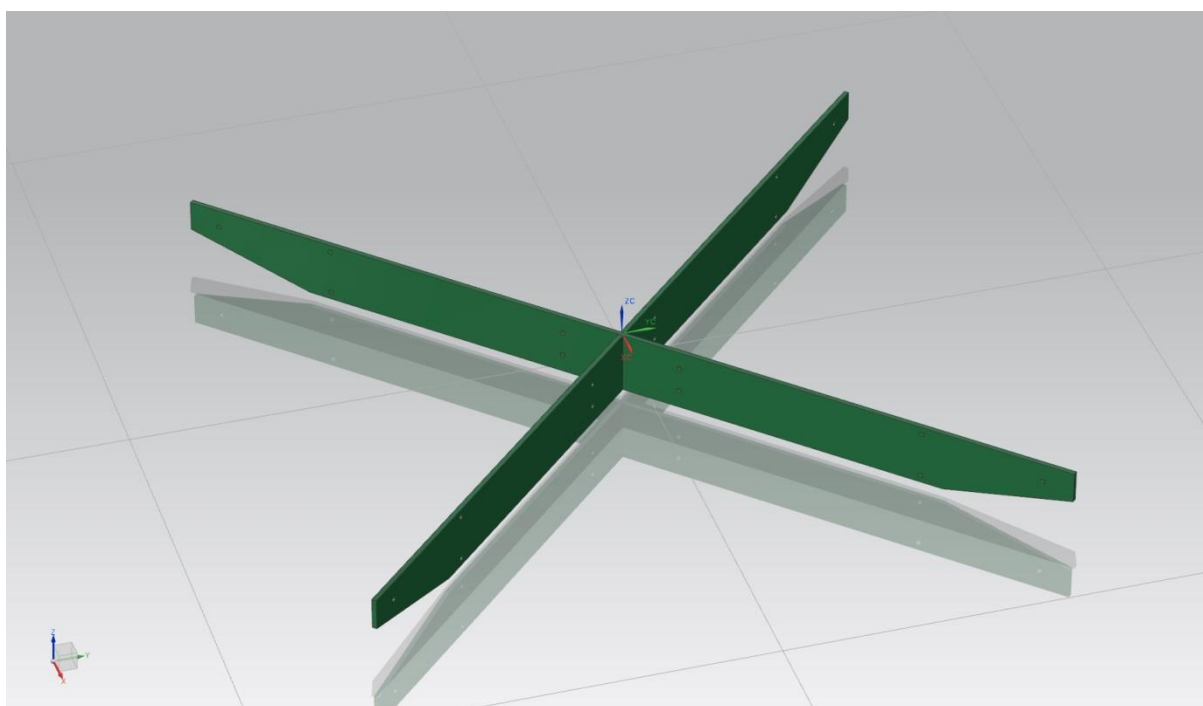


Figura 17.1 – Braços em “X”

A fixação central dos braços se dará por meio de duas chapas quadradas de alumínio de 1,5 mm de espessura, formando uma espécie de “sanduíche”. A união entre as chapas de alumínio e os braços de madeira será feita por meio de cantoneiras de alumínio e parafusos. A figura 17.2 ilustra o detalhe da região central.

A chapa de fixação central superior também servirá de base de fixação para o hardware a ser embarcado no protótipo (não representado na figura).

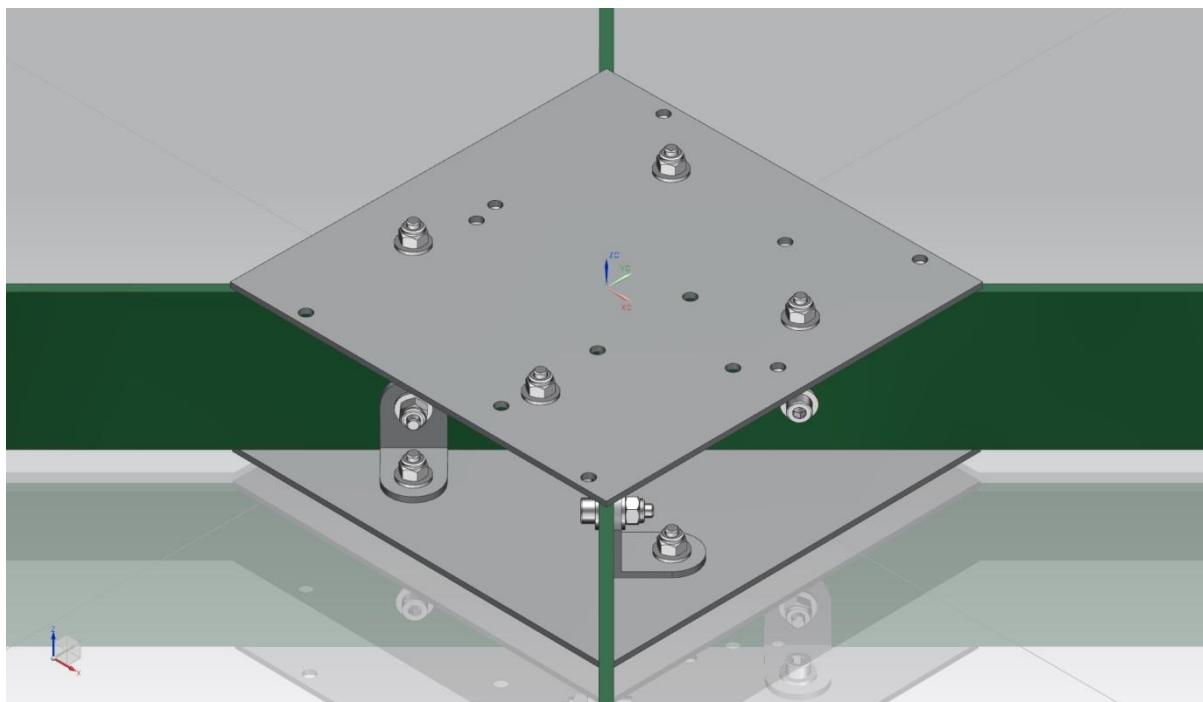


Figura 17.2 – Fixação central dos braços com auxílio das chapas de alumínio

Uma vez que os braços sozinhos são pouco rígidos à flexão lateral e à torção, serão adicionados reforçadores feitos de chapas de madeira do tipo Cedro com 3 mm de espessura. Estes serão vazados ao longo dos respectivos comprimentos de modo a proporcionar um alívio na massa total da aeronave, bem como diminuir a obstrução do fluxo de ar expelido pelos rotores. A figura 17.3 ilustra a adição dos reforçadores.

A união entre os reforçadores e os braços será feita por meio de cantoneiras de alumínio e parafusos, conforme ilustra a figura 17.4.

Essas mesmas cantoneiras serão responsáveis também pela fixação dos motores ao restante do protótipo, conforme pode ser visto na figura 17.5. Ainda nessa mesma figura pode ser visto o suporte de alumínio em “L” no qual é fixado o sensor de refletividade a ser usado em testes que envolvam a medição da rotação dos motores.

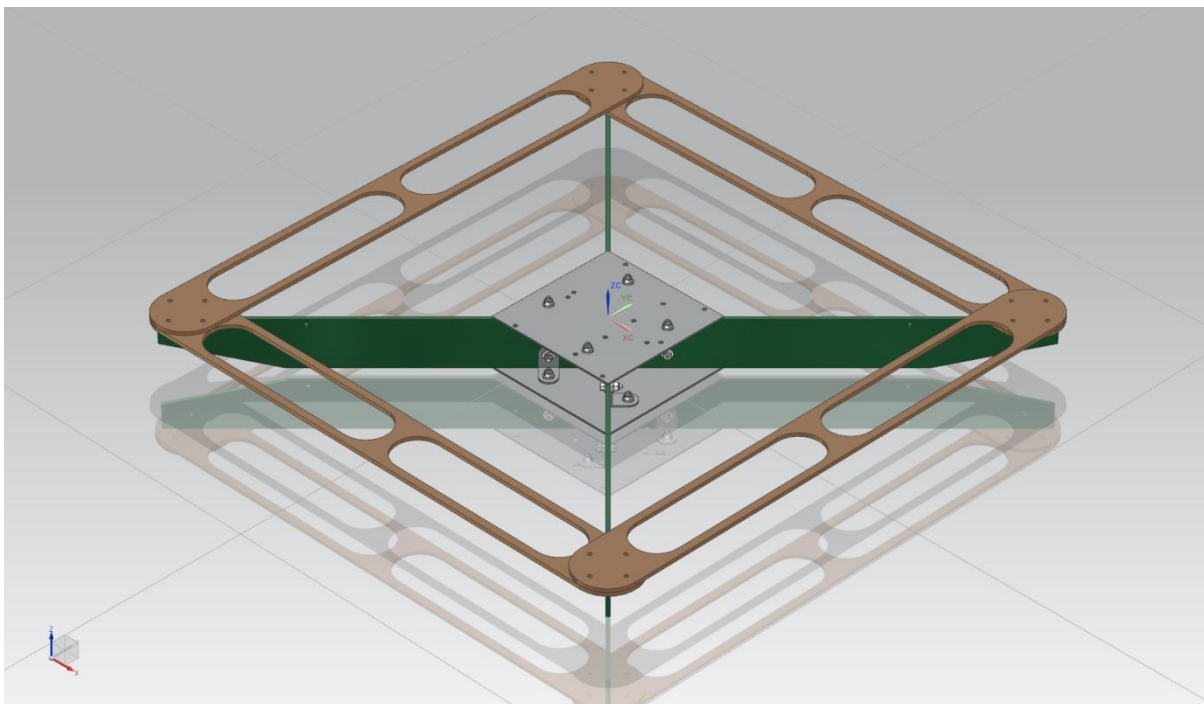


Figura 17.3 – Adição dos reforçadores

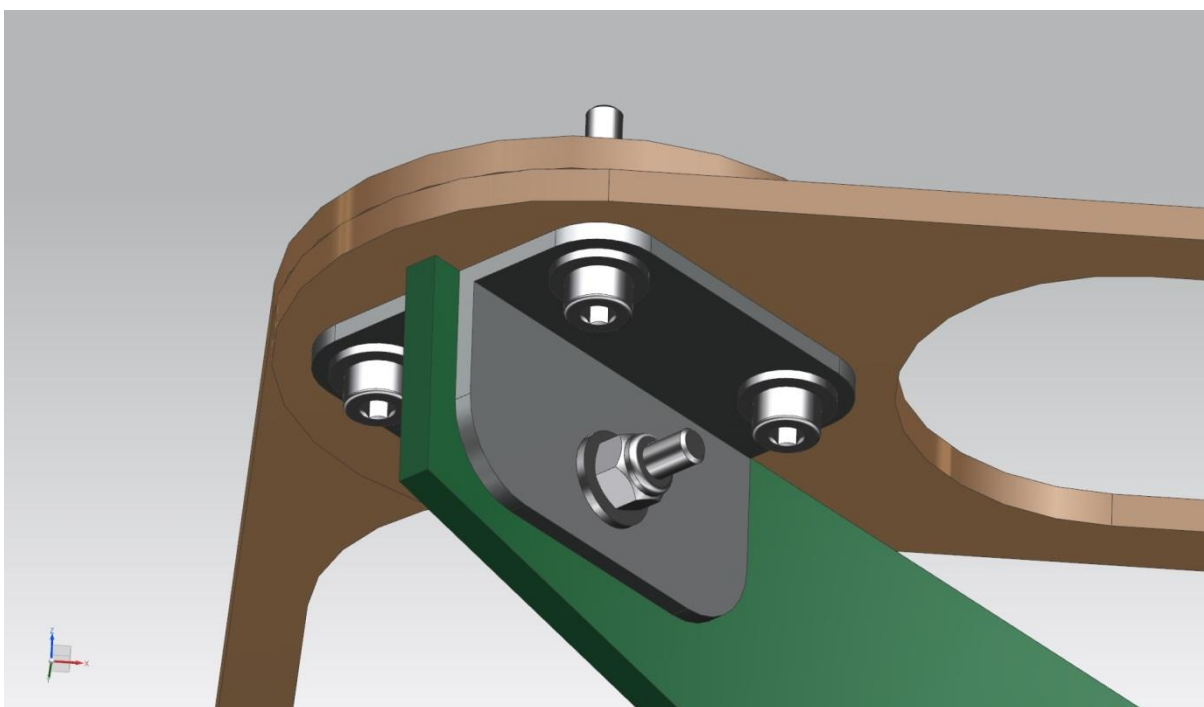


Figura 17.4 – Detalhe da união entre os reforçadores e os braços

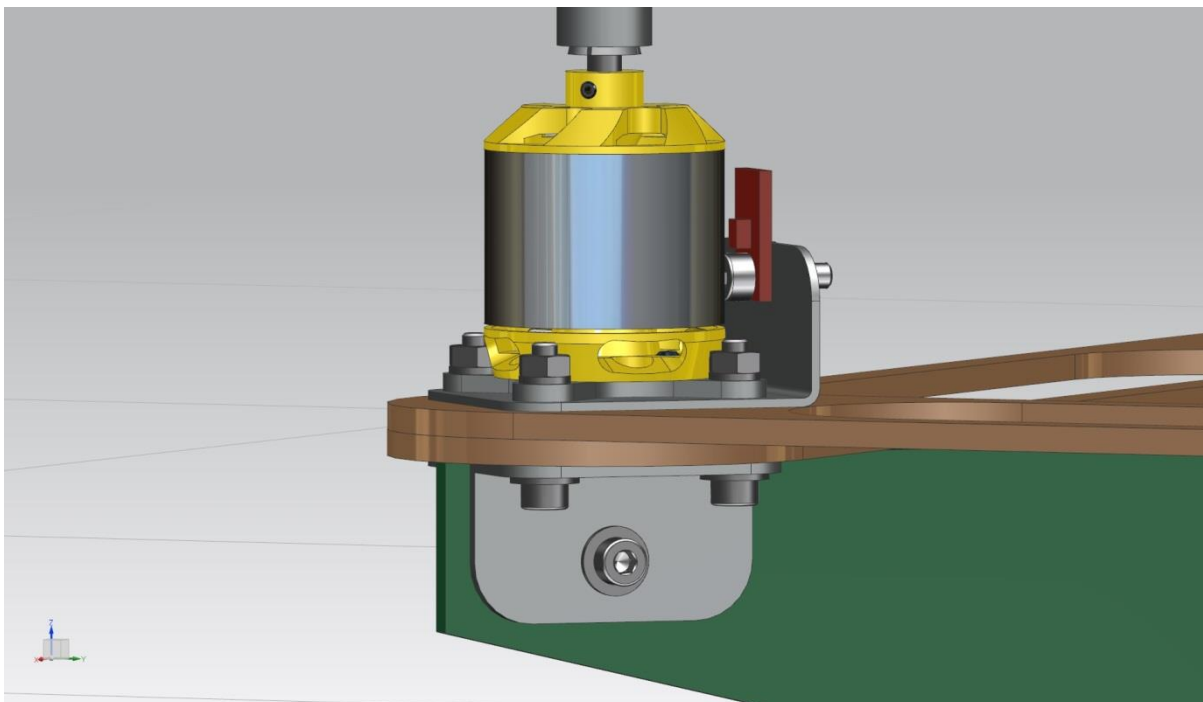


Figura 17.5 – Detalhe da fixação de um dos motores ao restante da estrutura

Na figura 17.6 pode ser vista a posição de fixação de um dos quatro ESCs (componente vermelho da figura) e de uma das quatro baterias (componente azul da figura) ao respectivo braço. Para a fixação propriamente dita desses componentes serão utilizadas cintas de Velcro (não representadas na figura).

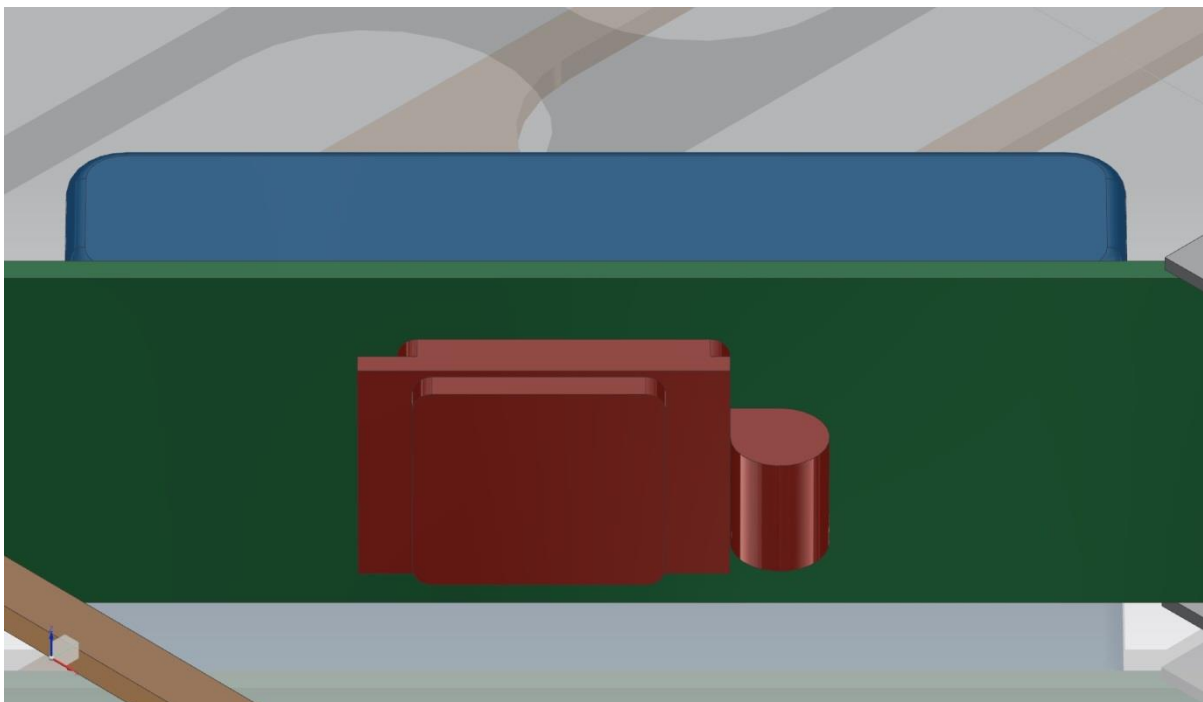


Figura 17.6 – Detalhe da posição de um ESC e de uma bateria em relação ao respectivo braço

Por fim, na figura 17.7 é apresentado o modelo em CAD completo do protótipo a ser construído, com exceção apenas do hardware embarcado, composto pelo Arduino DUE, o receptor Turnigy 9X8C-V2, os sensores BMA180 e ITG3205, e a placa de circuito a ser feita para melhor conexão dos componentes eletrônicos. Esses componentes não representados ficariam fixados na região central do protótipo, sobre a chapa de fixação central superior.

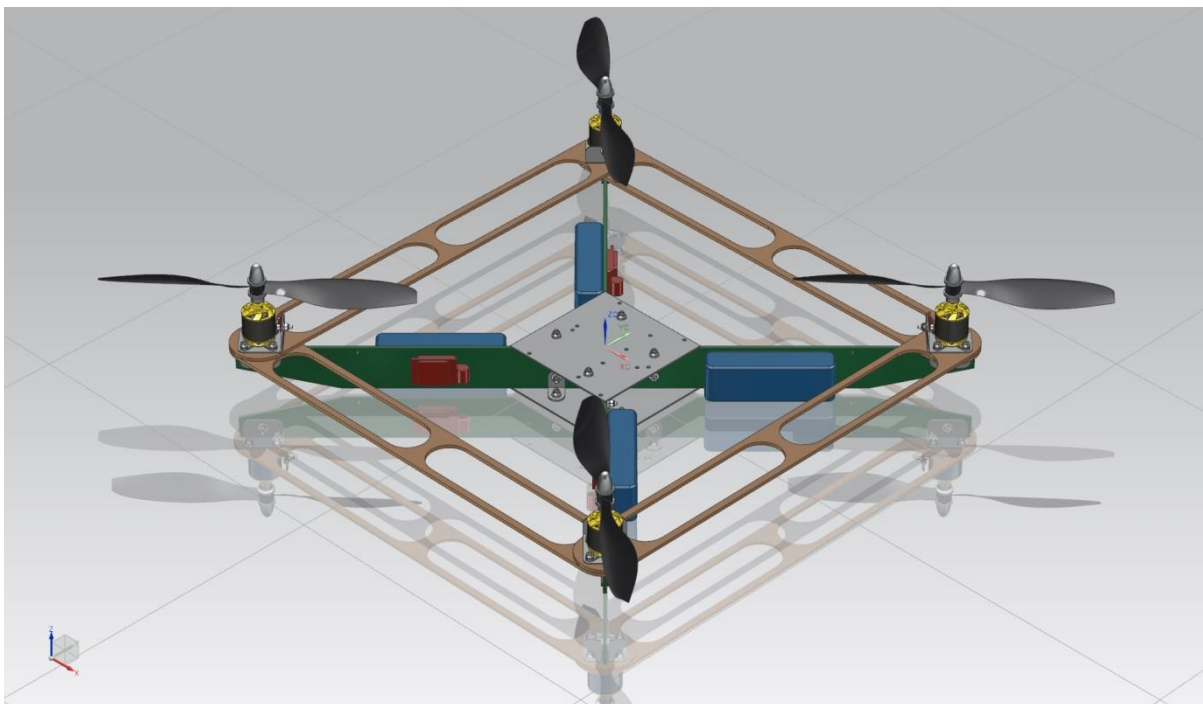


Figura 17.7 – Modelo em CAD completo do protótipo

As dimensões máximas do protótipo correspondem a um paralelepípedo de $654 \times 654 \times 128 \text{ mm}$ (incluindo os rotores), e a distância entre centros de dois rotores consecutivos é 400 mm . Observe que essas medidas satisfazem o requisito que impõe que a área projetada seja igual ou inferior a 1 m^2 .

17.2 Verificação pelo Método dos Elementos Finitos

Para garantir que a estrutura do protótipo a ser construído suportará os carregamentos gerados durante o voo, será conduzida uma verificação simples da sua resistência utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Nesta análise, as máximas tensões normais e de cisalhamento geradas em pontos específicos, as quais serão funções da geometria da estrutura como um todo e dos carregamentos impostos, serão comparadas aos limites de resistência do material empregado no ponto em questão. Uma vez que boa parte da estrutura é feita em madeira, um material ortotrópico e geralmente considerado frágil, as direções das tensões nas regiões analisadas precisarão ser consideradas.

Para simplificar a utilização do MEF, produziu-se o modelo simplificado da estrutura do protótipo apresentado na figura 17.8. Observe que este modelo não

leva em conta a presença dos furos por onde passam os parafusos nem a presença das cantoneiras nos pontos de união da estrutura, de modo que os resultados a serem obtidos devem ser considerados com cautela.

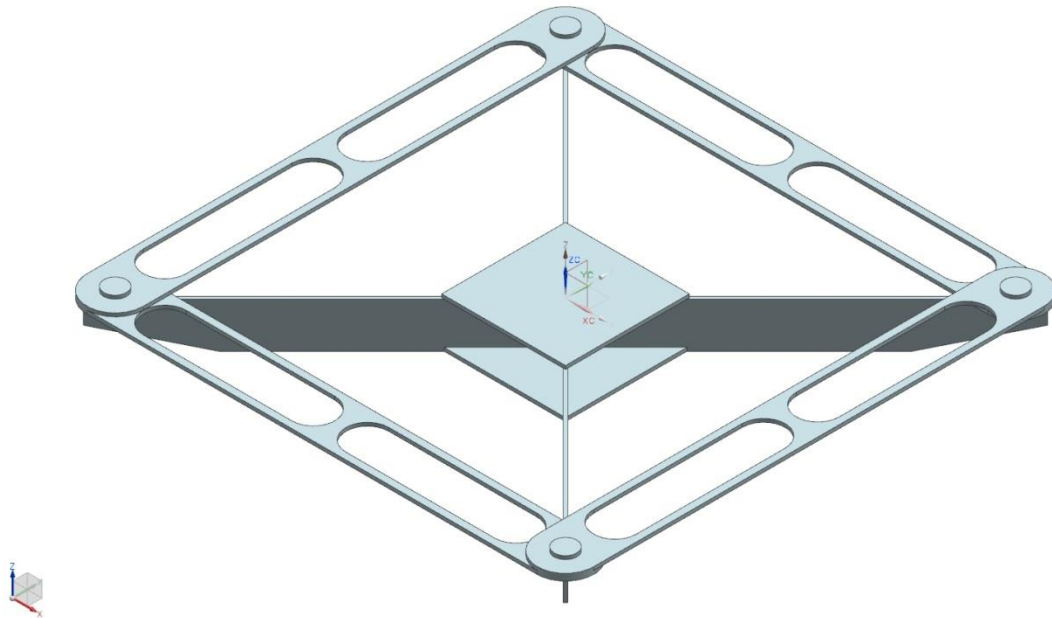


Figura 17.8 – Modelo simplificado do protótipo a ser utilizado para a análise pelo MEF

Sobre o modelo apresentado na figura anterior, criou-se uma malha do tipo CTETRA(10) com elementos de $3,0\text{ mm}$ de comprimento, o que resultou em um sistema linear com 485631 equações a serem resolvidas.

Uma vez que não foi possível obter dados de desempenho em voo de quadricópteros similares, e dados próprios só poderão ser levantados após a validação do protótipo, será simulado um carregamento genérico onde o protótipo é pendurado verticalmente pelos rotores, e uma determinada força é aplicada sobre a chapa de fixação central superior. Para efeito de cálculo será considerado uma força equivalente a quatro vezes o peso próprio do protótipo, ou seja, $F = 4 \cdot m \cdot g = 4 \times 1,787 \times 9,81 = 70,1\text{ N}$ (a obtenção da massa do protótipo $m = 1,787\text{ kg}$ será apresentada na próxima seção). A figura 17.9 mostra o modelo carregado.

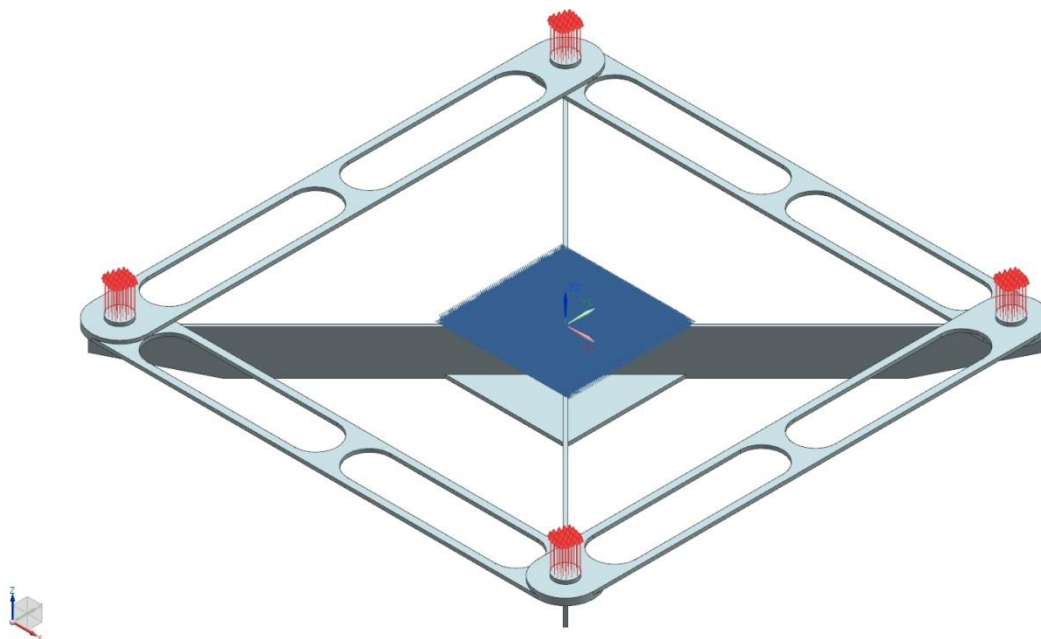


Figura 17.9 – Modelo carregado

Os resultados das simulações estão apresentados nas figuras 17.10 e 17.11.

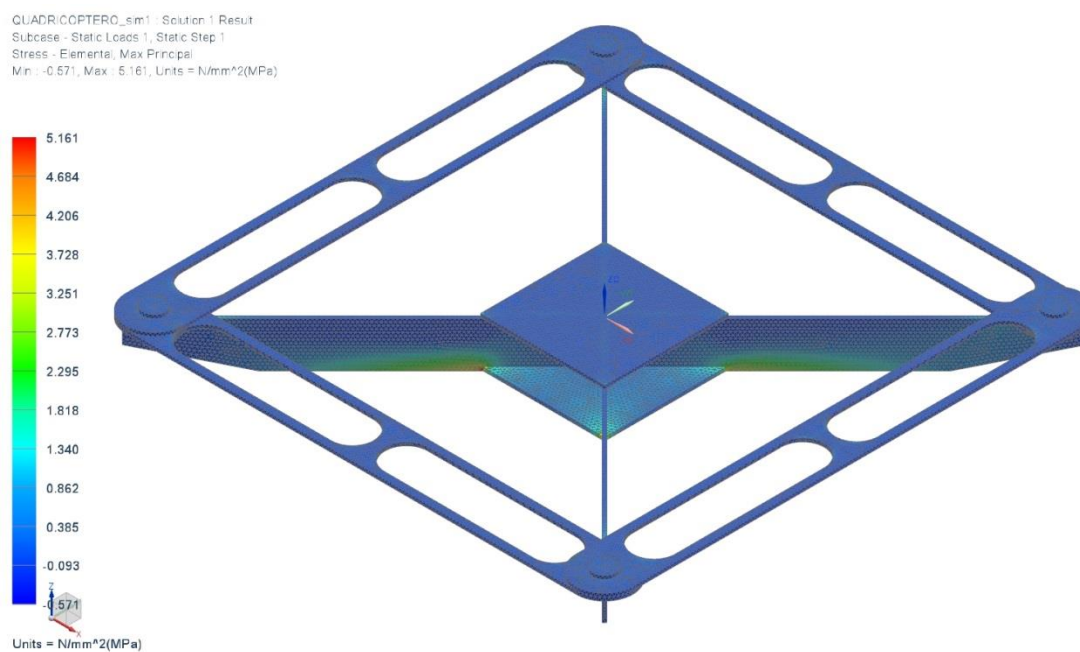


Figura 17.10 – Máxima tensão normal

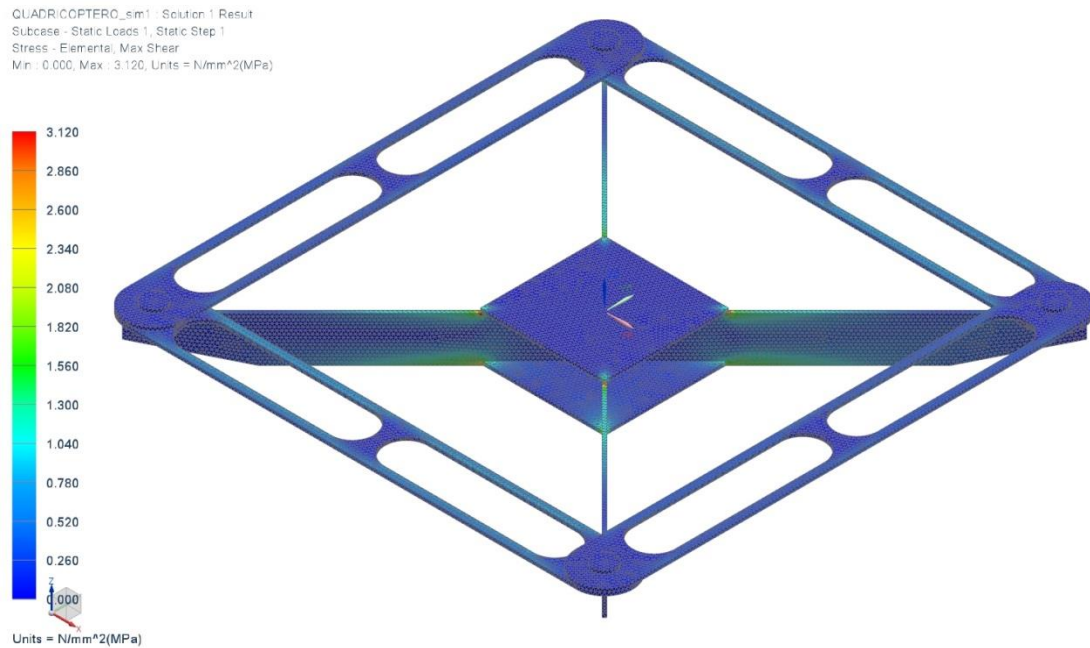


Figura 17.11 – Máxima tensão de cisalhamento

A partir da figura 17.10 pode-se perceber claramente que a máxima tensão normal ocorre nos braços em “X”, nas partes inferiores das regiões próximas às chapas de fixação central, e que o seu valor é $\sigma_{max} = 5,2 \text{ MPa}$. Note que esta tensão corresponde a uma tração na direção das fibras da madeira.

Já a partir da figura 17.11 pode-se perceber que a máxima tensão de cisalhamento ocorre nos braços em “X”, nas partes inferiores e superiores das regiões próximas às chapas de fixação central, e que o seu valor é $\tau_{max} = 3,1 \text{ MPa}$.

Sendo a resistência à flexão do Cedro com 15% de umidade igual a $81,2 \text{ MPa}$, e a sua resistência ao cisalhamento igual a $7,1 \text{ MPa}$ (CEDRO – IPT, 2014), pode-se concluir que a estrutura de sustentação do protótipo deve suportar o carregamento proposto.

18 PARÂMETROS FÍSICOS DO PROTÓTIPO

18.1 Parâmetros de distribuição de massa do protótipo

Para o cálculo da massa e da matriz de inércia, procedeu-se com a inclusão das massas específicas de cada um dos componentes do protótipo no modelo em CAD.

Em seguida, solicitou-se ao software de CAD utilizado, através de um comando específico, que fossem calculadas numericamente as propriedades mássicas do protótipo completo. O resultado obtido foi disponibilizado através do arquivo de texto reproduzido integralmente a seguir:

```
=====
Information listing created by : Yokota
Date                          : 17/09/2014 09:24:12
Current work part             :
E:\Dropbox\EPUSP\TCC\CAD\QUADRICOPTERO\v2.3\#QUADRICOPTERO.prt
Node name                     : i7
=====

Measurement Mass Properties

Displayed Mass Property Values
Volume                        = 951876.912281430 mm^3
Area                         = 587881.583122334 mm^2
Mass                         = 1.787000002 kg
Weight                       = 17.524499375 N
Radius of Gyration           = 195.999351635 mm
Centroid                     = -0.000563767, 0.008284928, -4.042006548 mm

=====

Detailed Mass Properties
Analysis calculated using accuracy of 0.990000000
Information Units            kg - mm

Density                      = 0.000001877
Volume                      = 951876.912281430
Area                        = 587881.583122334
Mass                        = 1.787000002

First Moments
Mx, My, Mz                  = -0.001007452, 0.014805166, -7.223065708

Center of Mass
Xcbar, Ycbar, Zcbar         = -0.000563767, 0.008284928, -4.042006548
```

Moments of Inertia (WCS)

I_x, I_y, I_z = 33669.452262003, 36029.863007605, 67656.952087414

Moments of Inertia (Centroidal)

I_{xc}, I_{yc}, I_{zc} = 33640.256460451, 36000.667328145, 67656.951964186

Moments of Inertia (Spherical)

I = 68648.937876391

Products of Inertia (WCS)

I_{yz}, I_{xz}, I_{xy} = -0.004138352, 0.009606737, -5.273716727

Products of Inertia (Centroidal)

I_{yc}, I_{xc}, I_{yc} = 0.055704228, 0.005534608, -5.273708380

Radii of Gyration (WCS)

R_x, R_y, R_z = 137.263715144, 141.993684644, 194.578090958

Radii of Gyration (Centroidal)

R_{xc}, R_{yc}, R_{zc} = 137.204189475, 141.936142900, 194.578090781

Radii of Gyration (Spherical)

R = 195.999351635

Principal Axes (Direction vectors relative to the WCS)

X_p(X), X_p(Y), X_p(Z) = -0.000000163, -0.000001760, 1.000000000

Y_p(X), Y_p(Y), Y_p(Z) = 0.002234216, 0.999997504, 0.000001760

Z_p(X), Z_p(Y), Z_p(Z) = -0.999997504, 0.002234216, -0.000000159

Principal Moments

I₁, I₂, I₃ = 67656.951964285, 36000.679110683, 33640.244677814

=====

Error Estimates

Volume = 868.627661378

Area = 299.861345511

Mass = 0.002134194

Moments of Inertia (Spherical) = 0.364056213

Center of Mass = 0.651344217, 0.651363102, 0.642718993

Moments of Inertia (WCS) = 1633.382151333, 1633.370624073, 1638.612033754

Products of Inertia (WCS) = 1637.885567147, 1640.518013854, 1640.523701079

Analisando-se os valores calculados, pode-se perceber claramente que os produtos de inércia do protótipo são, ao menos, quatro ordens de grandeza menores do que os momentos de inércia, de modo que seus valores podem ser desprezados.

Procedendo-se de forma análoga para os componentes girantes do conjunto formado por um rotor (elemento de sustentação aerodinâmica) e um rotor do motor elétrico (elemento eletromecânico móvel formado por ímãs permanentes, uma carcaça móvel, eixo e *spinner*), obteve-se o arquivo de texto reproduzido integralmente a seguir:

```
=====
Information listing created by : Yokota
Date : 17/09/2014 09:30:30
Current work part : E:\Dropbox\EPUSP\TCC\CAD\QUADRICOPTERO\v2.3\#CONJUNTO DO
ROTOR.prt
Node name : i7
=====

Measurement Mass Properties

Displayed Mass Property Values
Volume = 12354.278342736 mm^3
Area = 22352.209238302 mm^2
Mass = 0.049870851 kg
Weight = 0.489066427 N
Radius of Gyration = 34.446570369 mm
Centroid = 0.001519423, 0.000625232, -5.560465824 mm

=====

Detailed Mass Properties
Analysis calculated using accuracy of 0.990000000
Information Units kg - mm

Density = 0.000004037
Volume = 12354.278342736
Area = 22352.209238302
Mass = 0.049870851

First Moments
Mx, My, Mz = 0.000075775, 0.000031181, -0.277305165

Center of Mass
Xcbar, Ycbar, Zcbar = 0.001519423, 0.000625232, -5.560465824

Moments of Inertia (WCS)
Ix, Iy, Iz = 35.314829380, 43.380137047, 42.739060060

Moments of Inertia (Centroidal)
Ixc, Iyc, Izc = 33.772883467, 41.838191038, 42.739059926

Moments of Inertia (Spherical)
I = 59.175067215
```

```

Products of Inertia (WCS)
Iyz, Ixz, Ixy      =   -0.001144109,   -0.000095517,   18.538638420

Products of Inertia (Centroidal)
Iyzc, Ixzc, Ixyc   =   -0.000970729,    0.000325827,   18.538638373

Radii of Gyration (WCS)
Rx, Ry, Rz         =   26.610630498,   29.493211709,   29.274473416

Radii of Gyration (Centroidal)
Rxc, Ryc, Rzc      =   26.023198784,   28.964301380,   29.274473369

Radii of Gyration (Spherical)
R                   =   34.446570369

Principal Axes (Direction vectors relative to the WCS)
Xp(X), Xp(Y), Xp(Z) =   -0.627472617,    0.778638626,    0.000068404
Yp(X), Yp(Y), Yp(Z) =    0.000054497,   -0.000043933,    0.999999998
Zp(X), Zp(Y), Zp(Z) =    0.778638627,    0.627472619,   -0.000014867

Principal Moments
I1, I2, I3         =   56.777711924,   42.739059865,   18.833362642

=====
Error Estimates

Volume              =   195.098115394
Area                =   32.684058213
Mass                =    0.000343527
Moments of Inertia (Spherical) =   0.555133382
Center of Mass      =    0.027876200,    0.027875893,    0.025965505
Moments of Inertia (WCS) =    6.430314216,    6.430364069,    6.729780986
Products of Inertia (WCS) =    6.683177476,    6.838222780,    6.838199562

```

Convertendo-se os valores desejados para unidades mais convenientes, obtêm-se:

- Massa total do protótipo: $m = 1,787 \text{ kg}$
- Momento de inércia do protótipo na direção x : $I_B^{xx} = 3,36 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$
- Momento de inércia do protótipo na direção y : $I_B^{yy} = 3,60 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$
- Momento de inércia do protótipo na direção z : $I_B^{zz} = 6,77 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2$
- Momento de inércia do rotor: $I^r = 4,27 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^2$

Observe que a massa total acima satisfaz o requisito de que a massa do protótipo deve ser igual ou inferior a 2 kg.

18.2 Parâmetros aerodinâmicos do protótipo

Dada a elevada complexidade geométrica do protótipo e a impossibilidade de realização de ensaios em tuneis de vento, a determinação de seu coeficiente de arrasto aerodinâmico C_D será feita de forma aproximada, aplicando-se as suas dimensões características a uma forma geométrica conhecida, que no caso será um cilindro liso com diâmetro igual à altura. Reconhece-se desde já que a simplificação proposta possui caráter provisório, e que estudos mais rigorosos precisarão ser feitos em etapas futuras.

A partir do modelo em CAD, obteve-se que a área frontal do protótipo é dada por $S = 0,0281 \text{ m}^2$, resultando em um comprimento característico $c = \sqrt{S} = 0,168 \text{ m}$.

Uma vez que a velocidade máxima real de translação do protótipo só poderá ser determinada após a sua conclusão, o seu módulo será estimado entre $V_1 = 5 \text{ m/s}$ e $V_2 = 10 \text{ m/s}$. Para essas velocidades, considerando-se a massa específica padrão do ar $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$ e a viscosidade dinâmica padrão do ar $\mu = 1,79 \times 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$, o Número de Reynolds é

$$Re_1 = \frac{\rho \cdot V_1 \cdot c}{\mu} = \frac{1,23 \times 5 \times 0,168}{1,79 \times 10^{-5}} = 6 \times 10^4$$

$$Re_2 = \frac{\rho \cdot V_2 \cdot c}{\mu} = \frac{1,23 \times 10 \times 0,168}{1,79 \times 10^{-5}} = 1 \times 10^5$$

Assim, pode-se observar a partir da figura 18.1 que entre $Re_1 = 6 \times 10^4$ e $Re_2 = 1 \times 10^5$ o coeficiente de arrasto aerodinâmico de um cilindro liso é próximo de

$$C_D = 1,2$$

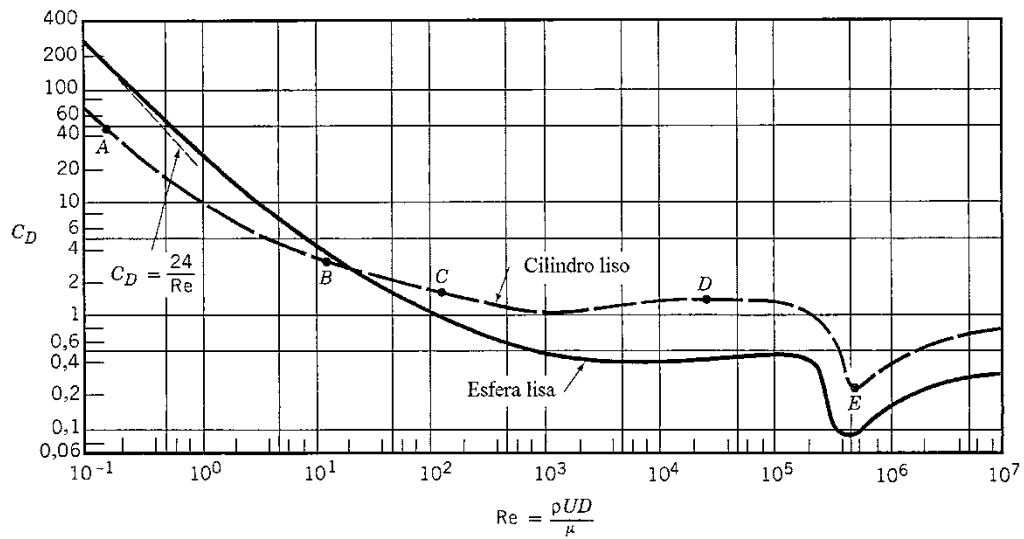


Figura 18.1 – Coeficiente de arrasto em função do Número de Reynolds (MUNSON, 2004)

Em suma, obteve-se:

- Área frontal do protótipo: $S = 0,0281 \text{ m}^2$
- Comprimento característico do protótipo: $c = 0,168 \text{ m}$
- Coeficiente de arrasto aerodinâmico: $C_D = 1,2$

18.3 Parâmetros aerodinâmicos dos rotores

Os parâmetros aerodinâmicos dos rotores que precisam ser determinados correspondem ao coeficiente de empuxo k_{T_i} , definido pela expressão 18.1, e o coeficiente de torque k_{Q_i} , definido pela expressão 18.2. As expressões 18.1 e 18.2 são obtidas diretamente das expressões 11.4 e 11.11, respectivamente, apresentadas anteriormente.

$$k_{T_i} = \frac{T_i}{\rho \cdot D^4 \cdot \Omega_i^2} \quad (18.1)$$

$$k_{Q_i} = \frac{Q_i}{\rho \cdot D^5 \cdot \Omega_i^2} \quad (18.2)$$

Para que se possa obter a força de empuxo T_i e o torque de arrasto Q_i para uma velocidade angular Ω_i , foi desenvolvida e fabricada a balança dinamométrica apresentada na figura 18.2, composta por um braço horizontal articulado por meio

de dois rolamentos (com torques de rolamento desprezíveis) a uma estrutura vertical de sustentação. Dependendo da forma como o motor com o rotor a ser testado é acoplado ao braço, pode-se medir tanto o efeito da força de empuxo quanto do torque de arrasto, por meio da leitura da força resultante aplicada sobre uma balança digital de precisão, posicionada abaixo de um ponto conveniente do braço. Adicionalmente, o sistema de tacômetro utilizado possibilita a leitura constante da rotação instantânea do sistema. Por fim, foi adicionado um dispositivo que permite a leitura da tensão e da corrente instantânea nos terminais da bateria utilizada para a alimentação do motor.

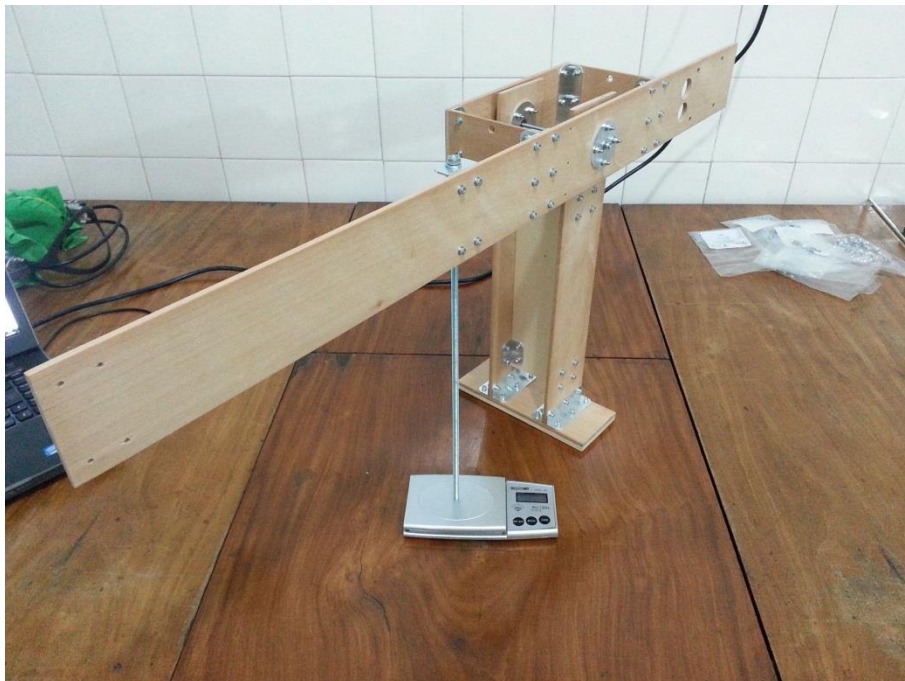


Figura 18.2 – Balança dinamométrica

Na figura 18.3 pode-se ver a balança dinamométrica na configuração para medida da força de empuxo T_i , ao passo que na figura 18.4 pode-se vê-la na configuração para medida do torque de arrasto Q_i .

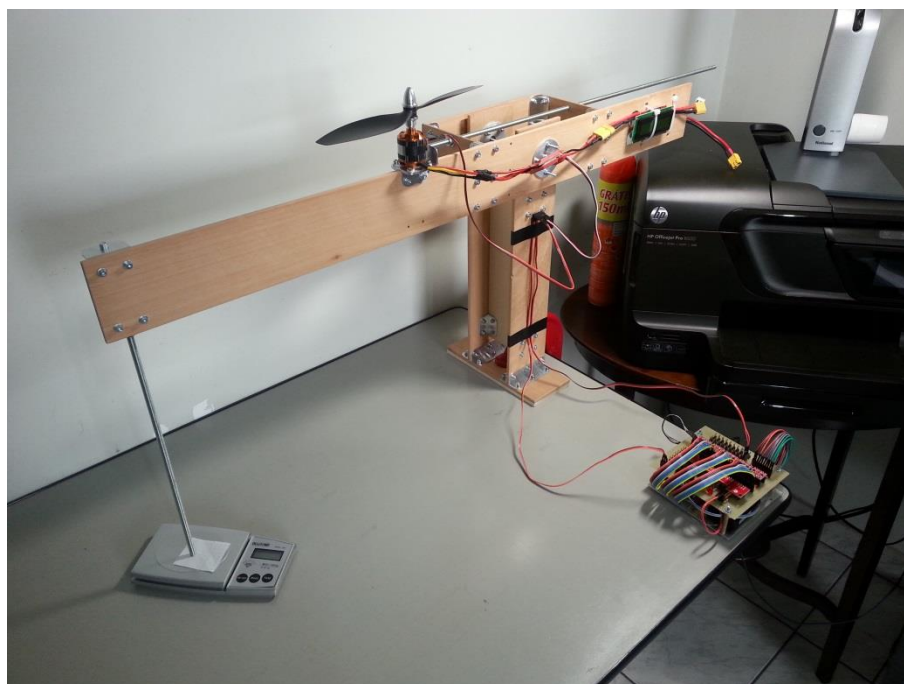


Figura 18.3 – Balança dinamométrica na configuração para medida da força de empuxo T_i

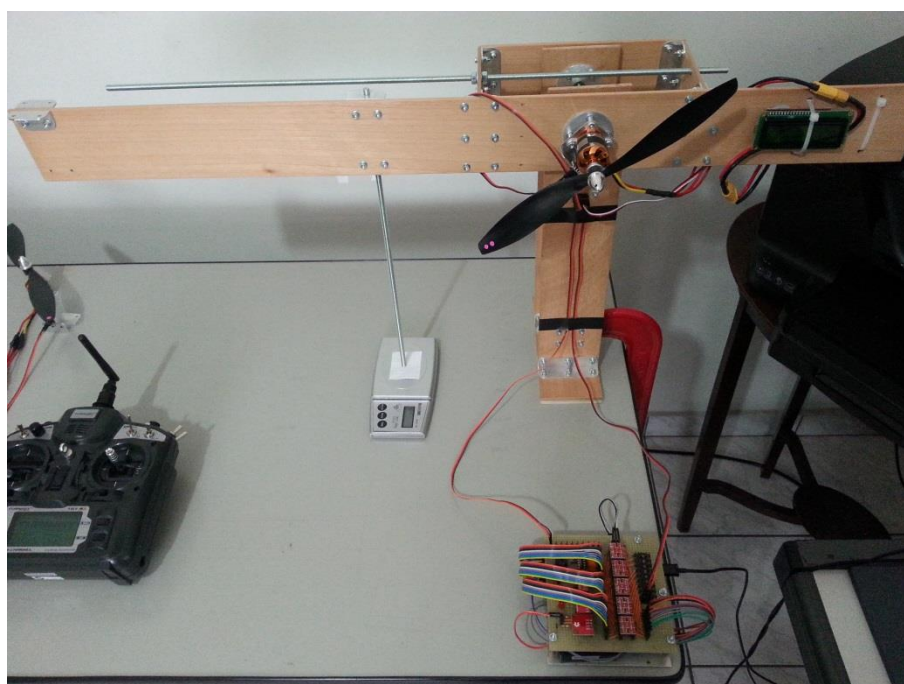


Figura 18.4 – Balança dinamométrica na configuração para medida do torque de arrasto Q_i

Antes da realização dos ensaios foram formados quatro conjuntos de componentes, cada um com um rotor, um motor, um ESC e uma bateria. Esses conjuntos, nomeados 1, 2, 3 e 4, de acordo com a posição em que ocupam no

protótipo segundo a figura 11.1, não foram mais alterados de modo a permitir que os ensaios realizados reflitam o efeito combinado de um conjunto específico de componentes. Esse cuidado precisou ser tomado pois, em ensaios preliminares, detectaram-se diferenças significativas no comportamento de um componente para o outro, quando os demais eram mantidos os mesmos.

Os procedimentos de ensaio para a avaliação da força de empuxo e do torque de arrasto são iguais. Em ambos os casos uma rotina de testes automática implementada no Arduino DUE envia ao ESC um sinal específico de entrada em degrau $U_i(k)$, e durante certo período de tempo toma uma determinada quantidade de leituras da evolução temporal da velocidade angular Ω_i . Os intervalos de tempo entre as leituras variam em função das características momentâneas da resposta, podendo ser mais refinados ou grosseiros. Os valores coletados são enviados continuamente a um computador que salva os dados em um arquivo de texto. Terminadas as leituras, o código envia ao ESC um sinal de entrada que põe o motor em ponto morto por 20 segundos, até que um novo sinal de entrada em degrau $U_i(k + 1)$, superior ao anterior, é aplicado e uma nova tomada de leituras é conduzida. Ao longo do tempo no qual a evolução temporal da velocidade angular Ω_i é gravada, o operador do ensaio deve, após notar a estabilização do sistema, efetuar as leituras da força na balança, bem como da tensão e da corrente na bateria. O ensaio do conjunto termina quando a velocidade angular do rotor não mais responde aos incrementos no sinal de controle.

Os resultados finais dos ensaios, tanto para a medida da força de empuxo quanto do torque de arrasto, são as evoluções temporais da velocidade angular para cada um dos diferentes sinais de entrada em degrau aplicados, seguidos das leituras das forças na balança, e das tensões e correntes na bateria, para cada um dos 4 conjuntos de componentes testados.

De posse dos dados brutos, deve-se inicialmente converter a força medida pela balança de *grama – força* para *N*. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 F_{N_i} &= m_i \cdot g \\
 \rightarrow F_{N_i} &= \frac{F_{kgf_i}}{g^*} \cdot g \\
 \rightarrow F_{N_i} &= \frac{g}{1000 \cdot g^*} F_{grama-força_i}
 \end{aligned} \tag{18.3}$$

onde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade padrão e $g^* = 1,0 \text{ kgf/kg}$ é um termo de compatibilização dimensional.

Em seguida, para o caso da determinação da força de empuxo a partir da força medida pela balança, tem-se

$$T_i = \frac{l_{emp.bal.}}{l_{emp.rotor}} F_{N_i} \quad (18.4)$$

onde $l_{emp.bal.} = 0,500 \text{ m}$ e $l_{emp.rotor} = 0,200 \text{ m}$ são, respectivamente, as distâncias da linha de ação da força aplicada sobre a balança e da linha de ação da força de empuxo, até o eixo de pivotamento da balança dinamométrica.

De posse da força de empuxo, a determinação do coeficiente de empuxo se dá com o auxílio da expressão 18.1, reproduzida a seguir por conveniência,

$$k_{T_i} = \frac{T_i}{\rho \cdot D^4 \cdot \Omega_i^2}$$

Será considerado o diâmetro do rotor $D = 0,254 \text{ m}$.

Para o caso da determinação do torque de arrasto a partir da força medida pela balança, tem-se

$$Q_i = l_{arr.bal.} \cdot F_{N_i} \quad (18.5)$$

onde $l_{arr.bal.} = 0,200 \text{ m}$ é a distância da linha de ação da força aplicada sobre a balança até o eixo de pivotamento da balança dinamométrica.

De posse do torque de arrasto, a determinação do coeficiente de torque se dá com o auxílio da expressão 18.2, reproduzida a seguir por conveniência,

$$k_{Q_i} = \frac{Q_i}{\rho \cdot D^5 \cdot \Omega_i^2}$$

As velocidades angulares utilizadas para os cálculos dos coeficientes de empuxo e torque correspondem às velocidades angulares de regime permanente para cada sinal de entrada em degrau U_i aplicado.

Observando-se os valores obtidos para os coeficientes de empuxo e torque, pôde-se perceber que estes variam linearmente com a velocidade angular do respectivo rotor, indicando certa limitação no modelo dado pelas expressões 11.4 e 11.11. Assim, para a determinação dos valores finais destes coeficientes, serão ajustadas equações de retas entre cada um deles e as velocidades angulares com as quais se relacionam, para que seus valores referentes a uma determinada condição de voo sejam mais facilmente determinados.

Considere o coeficiente de empuxo variando linearmente com a velocidade angular do i – ésimo rotor, de acordo com a expressão 18.6 a seguir,

$$k_{T_i} = A_{T_i} \cdot \Omega_i + B_{T_i} \quad (18.6)$$

Considere também a expressão 18.7 para a velocidade angular Ω_{i_0} do i – ésimo rotor para a condição de voo pairado

$$\frac{m \cdot g}{4} = k_{T_i} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{i_0}^2 \quad (18.7)$$

Substituindo-se 18.6 em 18.7 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot g}{4} &= (A_{T_i} \cdot \Omega_{i_0} + B_{T_i}) \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{i_0}^2 \\ \rightarrow \Omega_{i_0}^3 + \frac{B_{T_i}}{A_{T_i}} \cdot \Omega_{i_0}^2 - \frac{m \cdot g}{4 \cdot \rho \cdot D^4 \cdot A_{T_i}} &= 0 \end{aligned} \quad (18.8)$$

Resolvendo-se a equação 18.8, obtém-se a velocidade angular Ω_{i_0} para a condição de voo pairado, que pode ser substituída na equação 18.6 para a obtenção do coeficiente de empuxo final a ser utilizado ao longo do trabalho.

Analogamente, o coeficiente de torque em função da velocidade angular do i – ésimo rotor é dado pela expressão 18.9 a seguir

$$k_{Q_i} = A_{Q_i} \cdot \Omega_i + B_{Q_i} \quad (18.9)$$

Substituindo-se a velocidade angular Ω_{i_0} na expressão 18.9, obtém-se o coeficiente de torque final.

A seguir são apresentados os resultados obtidos com base nos dados coletados:

- Velocidade angular do conjunto 1 para voo pairado: $\Omega_{1_0} = 559 \text{ rad/s}$
- Velocidade angular do conjunto 2 para voo pairado: $\Omega_{2_0} = 553 \text{ rad/s}$
- Velocidade angular do conjunto 3 para voo pairado: $\Omega_{3_0} = 545 \text{ rad/s}$
- Velocidade angular do conjunto 4 para voo pairado: $\Omega_{4_0} = 559 \text{ rad/s}$
- Coeficiente de empuxo do rotor do conjunto 1: $k_{T_1} = 2,74 \times 10^{-3}$
- Coeficiente de empuxo do rotor do conjunto 2: $k_{T_2} = 2,80 \times 10^{-3}$
- Coeficiente de empuxo do rotor do conjunto 3: $k_{T_3} = 2,88 \times 10^{-3}$
- Coeficiente de empuxo do rotor do conjunto 4: $k_{T_4} = 2,74 \times 10^{-3}$
- Coeficiente de torque do rotor do conjunto 1: $k_{Q_1} = 1,69 \times 10^{-4}$
- Coeficiente de torque do rotor do conjunto 2: $k_{Q_2} = 1,83 \times 10^{-4}$
- Coeficiente de torque do rotor do conjunto 3: $k_{Q_3} = 1,81 \times 10^{-4}$
- Coeficiente de torque do rotor do conjunto 4: $k_{Q_4} = 1,97 \times 10^{-4}$

18.4 Parâmetros dos motores

Para a determinação empírica dos ganhos dos motores K_{m_i} e das constantes de tempo T_{m_i} , serão utilizados os mesmos dados a partir dos quais foram obtidos os coeficientes de empuxo k_{T_i} e torque k_{Q_i} .

Substituindo-se o sinal de entrada em degrau U_i na equação 12.7, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_i &= -\frac{1}{T_{m_i}} \Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} u_i \\ \rightarrow \dot{\Omega}_i + \frac{1}{T_{m_i}} \Omega_i &= \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} U_i \end{aligned} \quad (18.10)$$

Considerando-se condições iniciais nulas e aplicando-se as Transformadas de Laplace, obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\dot{\Omega}_i) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{T_{m_i}}\Omega_i\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{K_{m_i}}{T_{m_i}}U_i\right) \\
\rightarrow s \cdot \Omega_i(s) + \frac{1}{T_{m_i}}\Omega_i(s) &= \frac{\frac{K_{m_i}}{T_{m_i}}U_i}{s} \\
\rightarrow \Omega_i(s) &= \frac{\frac{K_{m_i}}{T_{m_i}}U_i}{s \cdot \left(s + \frac{1}{T_{m_i}}\right)} \\
\rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\Omega_i(s)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{K_{m_i}}{T_{m_i}}U_i}{s \cdot \left(s + \frac{1}{T_{m_i}}\right)}\right) \\
\rightarrow \Omega_i &= K_{m_i} \cdot U_i \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{m_i}}}\right)
\end{aligned} \tag{18.11}$$

Para se determinar K_{m_i} deve-se analisar o comportamento para $t \rightarrow \infty$, ou seja, para o sistema em regime permanente,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(K_{m_i} \cdot U_i \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{m_i}}}\right) \right) \\
\rightarrow \Omega_{RP_i} &= K_{m_i} \cdot U_i \\
\rightarrow K_{m_i} &= \frac{\Omega_{RP_i}}{U_i}
\end{aligned} \tag{18.12}$$

Já T_{m_i} pode ser determinada como se segue

$$\begin{aligned}
\Omega_i &= K_{m_i} \cdot U_i \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{m_i}}}\right) \\
\rightarrow 1 - \frac{\Omega_i}{K_{m_i} \cdot U_i} &= e^{-\frac{t}{T_{m_i}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \ln\left(1 - \frac{\Omega_i}{K_{m_i} \cdot U_i}\right) = -\frac{t}{T_{m_i}} \\
&\rightarrow T_{m_i} = -\frac{t}{\ln\left(1 - \frac{\Omega_i}{K_{m_i} \cdot U_i}\right)} \\
&\rightarrow T_{m_i} = -\frac{t}{\ln\left(1 - \frac{\Omega_i}{\Omega_{RP_i}}\right)} \quad (18.13)
\end{aligned}$$

Da mesma forma como foi observado para os coeficientes de empuxo e torque, tanto os ganhos dos motores quanto as suas constantes de tempo apresentam, na prática, uma dependência aproximadamente linear com as respectivas velocidades angulares. Assim, mais uma vez, serão ajustadas equações de retas que permitam obter os valores dos parâmetros em questão para as respectivas velocidades angulares de voo pairado.

Considere as equações 18.14 e 18.15 relacionando, respectivamente, o ganho K_{m_i} e a constante de tempo T_{m_i} do i – ésimo motor à sua velocidade angular Ω_i

$$K_{m_i} = A_{K_{m_i}} \cdot \Omega_i + B_{K_{m_i}} \quad (18.14)$$

$$T_{m_i} = A_{T_{m_i}} \cdot \Omega_i + B_{T_{m_i}} \quad (18.15)$$

Substituindo-se a velocidade angular para a condição de voo pairado Ω_{i_0} em cada uma das equações anteriores, podem-se determinar os valores finais do ganho K_{m_i} e a constante de tempo T_{m_i} .

Adicionalmente, podem-se determinar os sinais de entrada de controle para a condição de voo pairado

$$u_{i_0} = \frac{\Omega_{i_0}}{K_{m_i}} \quad (18.16)$$

A seguir são apresentados os resultados obtidos com base nos dados coletados:

- Ganho do motor do conjunto 1: $K_{m_1} = 2,983 \text{ rad/s}$
- Ganho do motor do conjunto 2: $K_{m_2} = 3,677 \text{ rad/s}$
- Ganho do motor do conjunto 3: $K_{m_3} = 3,643 \text{ rad/s}$

- Ganho do motor do conjunto 4: $K_{m_4} = 3,693 \text{ rad/s}$
- Constante de tempo do motor do conjunto 1: $T_{m_1} = 0,065 \text{ s}$
- Constante de tempo do motor do conjunto 2: $T_{m_2} = 0,063 \text{ s}$
- Constante de tempo do motor do conjunto 3: $T_{m_3} = 0,068 \text{ s}$
- Constante de tempo do motor do conjunto 4: $T_{m_4} = 0,067 \text{ s}$
- Sinal de entrada de controle do conjunto 1 para voo pairado: $u_{1_0} = 188$
- Sinal de entrada de controle do conjunto 2 para voo pairado: $u_{2_0} = 149$
- Sinal de entrada de controle do conjunto 3 para voo pairado: $u_{3_0} = 149$
- Sinal de entrada de controle do conjunto 4 para voo pairado: $u_{4_0} = 150$

Analisando-se os valores obtidos para os ganhos dos motores e os sinais de entrada de controle para voo pairado, pode-se notar claramente que o conjunto 1 difere sensivelmente dos demais. A razão para isso está no fato de que, apesar de todos os ESCs usados serem do mesmo modelo, o ESC do conjunto 1 foi comprado com alguns meses de antecedência em relação aos demais, de modo que supõe-se que tenham havido mudanças no *firmware* desse dispositivo entre as datas de fabricação dos dois lotes.

19 SIMULAÇÃO DO MODELO NÃO LINEAR EM MALHA ABERTA

Para que se possa verificar a validade do modelo não linear em malha aberta, bem como conhecer sua dinâmica, este será simulado numericamente com o auxílio do software Matlab. A integração no tempo do seu sistema de equações diferenciais (equações de 11.18 a 11.29, mais a equação 12.7) será feita empregando-se o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Apenas nesta seção, os parâmetros físicos dos quatro sistemas propulsores serão supostos iguais aos valores médios apresentados a seguir, obtidos a partir dos valores individuais apresentados na seção 18:

- Velocidade angular para voo pairado: $\Omega_0 = 554 \text{ rad/s}$
- Coeficiente de empuxo: $k_T = 2,79 \times 10^{-3}$
- Coeficiente de torque: $k_Q = 1,82 \times 10^{-4}$
- Ganho do motor: $K_m = 3,499 \text{ rad/s}$
- Constante de tempo do motor: $T_m = 0,066 \text{ s}$
- Sinal de entrada de controle para voo pairado: $u_0 = 158$

Esta medida visa evidenciar aspectos mais sutis do comportamento dinâmico do sistema que, de outra forma, seriam dificilmente percebidos, dado o elevado efeito desestabilizador que as diferenças nos desempenhos dos sistemas propulsores têm sobre a resposta.

Salienta-se que para o desenvolvimento e simulação do sistema de controle nas próximas seções, serão considerados os dados individuais dos sistemas propulsores apresentados na seção 18. Os demais parâmetros do protótipo serão mantidos os mesmos em todo o trabalho.

A seguir são apresentados os resultados para cinco conjuntos de condições iniciais.

Tabela 19.1 – Conjunto de condições iniciais 1

Coordenada x_E da posição	$x_E = 40 \text{ m}$
Coordenada y_E da posição	$y_E = 20 \text{ m}$
Altitude h_r	$h_r = 10 \text{ m}$
Coordenada ϕ da posição angular (Direção $O_B x_B$ – Rolagem)	$\phi = 0$
Coordenada θ da posição angular (Direção $O_B y_B$ – Arfagem)	$\theta = 0$
Coordenada ψ da posição angular (Direção $O_B z_B$ – Guinada)	$\psi = 20^\circ$
Coordenada u da velocidade (Direção $O_B x_B$)	$u = 0$
Coordenada v da velocidade (Direção $O_B y_B$)	$v = 0$
Coordenada w da velocidade (Direção $O_B z_B$)	$w = 0$
Coordenada p da velocidade angular (Direção $O_B x_B$)	$p = 0$
Coordenada q da velocidade angular (Direção $O_B y_B$)	$q = 0$
Coordenada r da velocidade angular (Direção $O_B z_B$)	$r = 0$
Velocidade angular inicial do rotor 1	$\Omega_1 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 2	$\Omega_2 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 3	$\Omega_3 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 4	$\Omega_4 = \Omega_0$

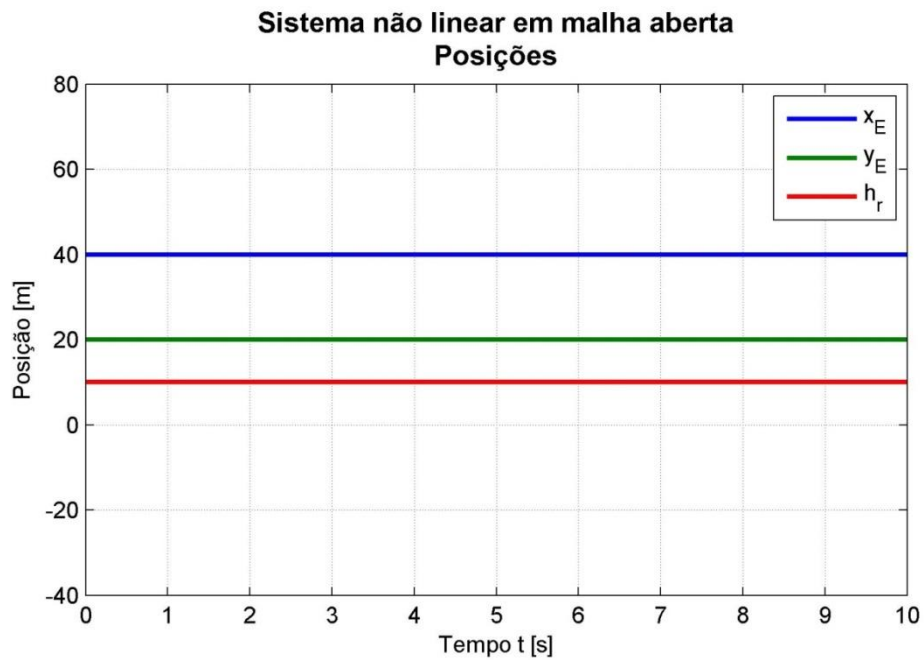


Figura 19.1 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 1

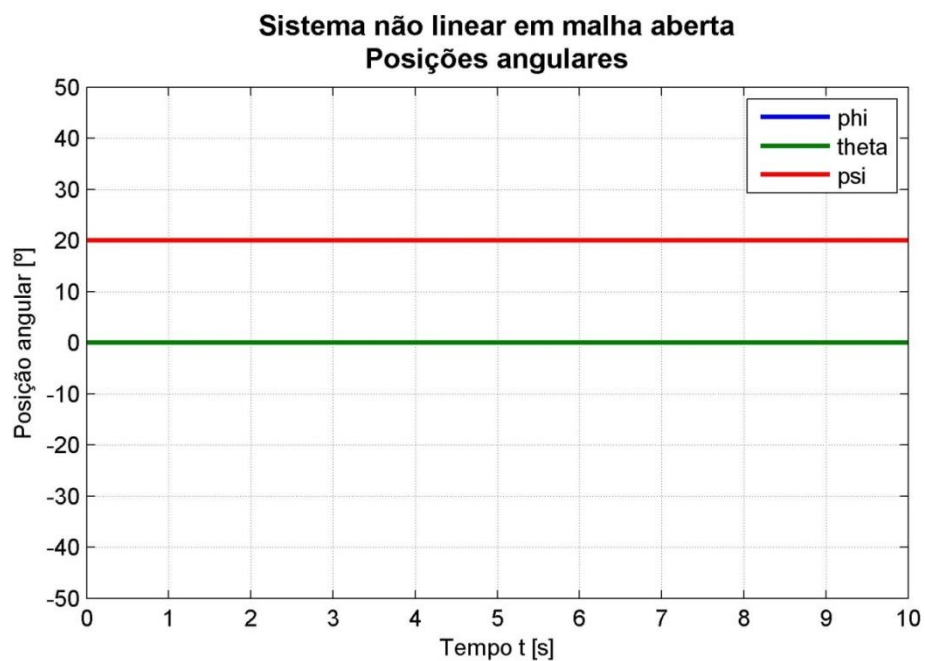


Figura 19.2 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 1

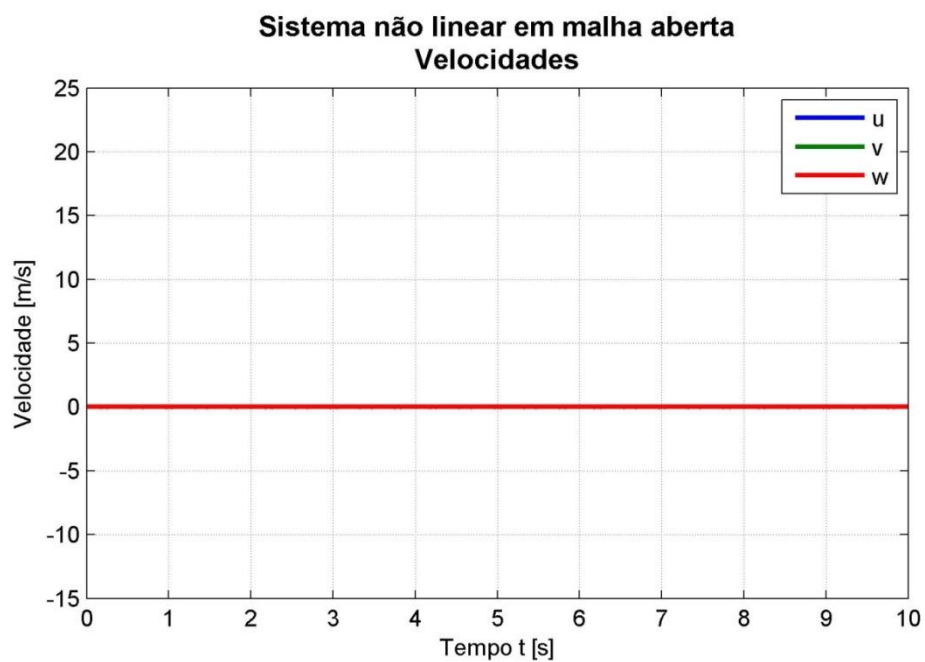


Figura 19.3 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 1

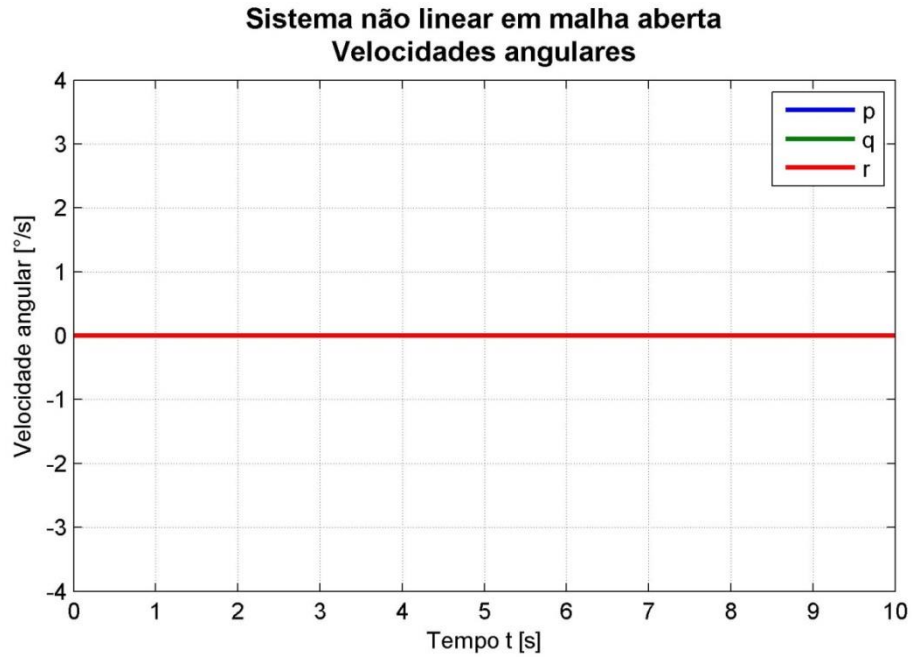


Figura 19.4 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 1

No primeiro conjunto de condições iniciais, foram impostos valores não nulos para as três coordenadas de posição x_E , y_E e z_E , bem como para a posição angular ψ (guinada). Já as demais coordenadas foram mantidas nos seus respectivos pontos de equilíbrio para um voo pairado.

Pode-se notar claramente que o sistema permaneceu em equilíbrio para esse conjunto de condições iniciais, fato que na prática não deve ser observado devido ao efeito desestabilizador que as diferenças nos desempenhos dos sistemas propulsores têm sobre a resposta do sistema real, às imperfeições construtivas do protótipo, bem como pela inevitável ação de distúrbios externos.

Tabela 19.2 – Conjunto de condições iniciais 2

Coordenada x_E da posição	$x_E = 0$
Coordenada y_E da posição	$y_E = 0$
Altitude h_r	$h_r = 10 \text{ m}$
Coordenada ϕ da posição angular (Direção $O_B x_B$ – Rolagem)	$\phi = 10^\circ$
Coordenada θ da posição angular (Direção $O_B y_B$ – Arfagem)	$\theta = 5^\circ$
Coordenada ψ da posição angular (Direção $O_B z_B$ – Guinada)	$\psi = 0$
Coordenada u da velocidade (Direção $O_B x_B$)	$u = 0$
Coordenada v da velocidade (Direção $O_B y_B$)	$v = 0$
Coordenada w da velocidade (Direção $O_B z_B$)	$w = 0$
Coordenada p da velocidade angular (Direção $O_B x_B$)	$p = 0$
Coordenada q da velocidade angular (Direção $O_B y_B$)	$q = 0$
Coordenada r da velocidade angular (Direção $O_B z_B$)	$r = 0$
Velocidade angular inicial do rotor 1	$\Omega_1 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 2	$\Omega_2 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 3	$\Omega_3 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 4	$\Omega_4 = \Omega_0$

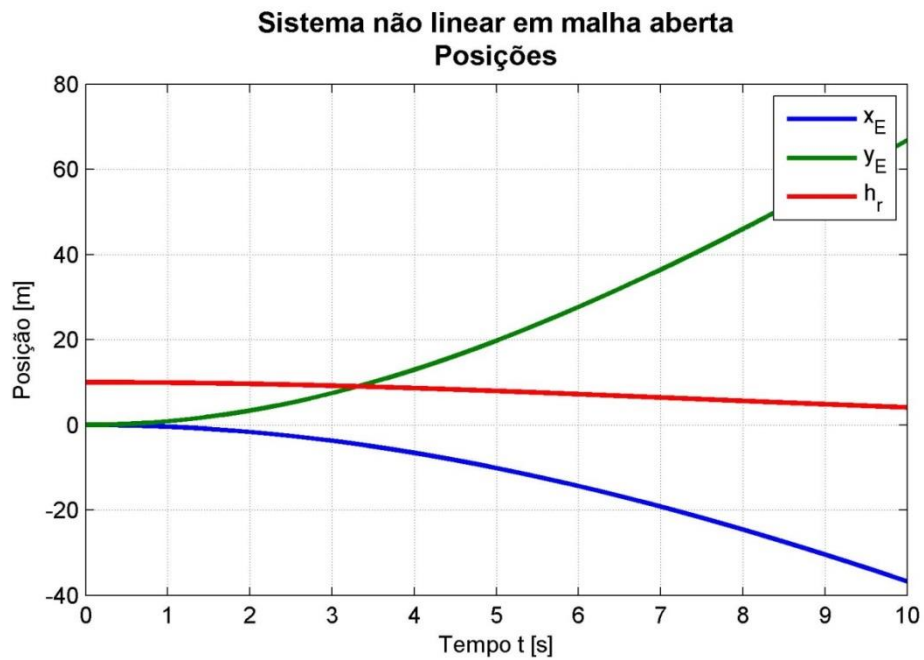


Figura 19.5 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 2

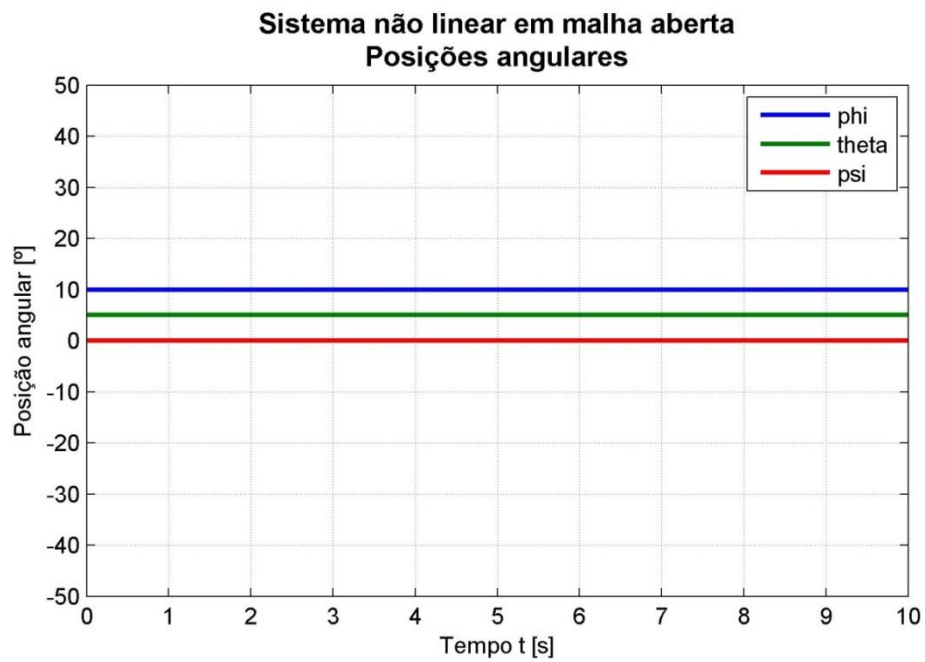


Figura 19.6 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 2

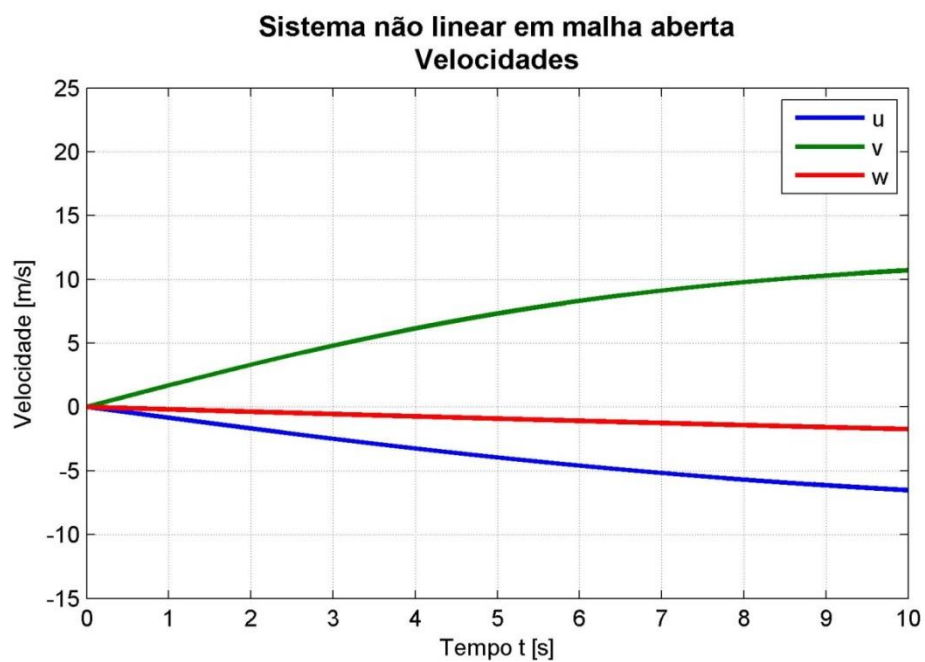


Figura 19.7 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 2

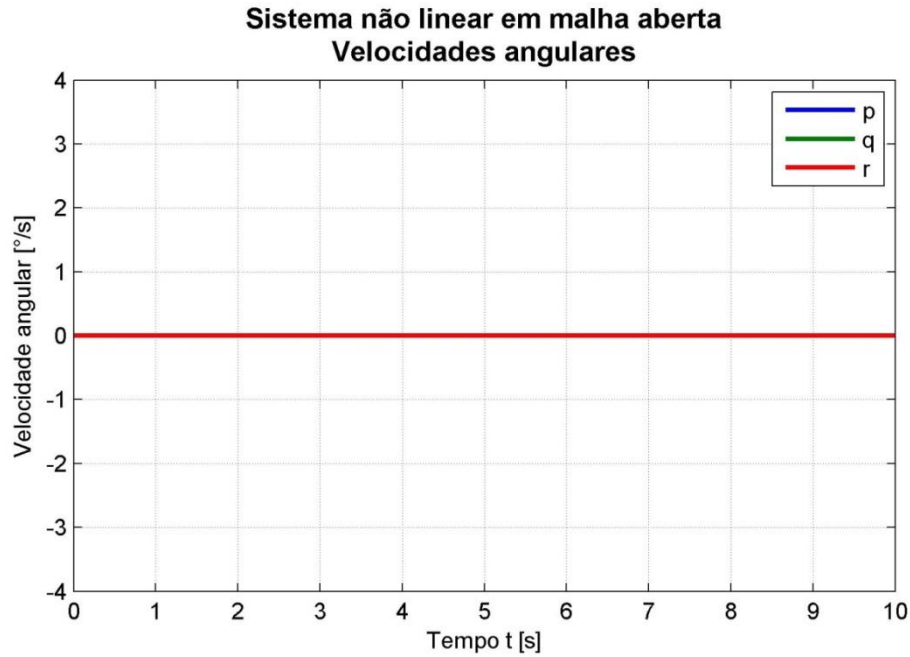


Figura 19.8 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 2

No segundo conjunto de condições iniciais, foram impostos deslocamentos angulares positivos nas coordenadas ϕ e θ (rolagem e arfagem respectivamente).

Esse desnivelamento faz com que os empuxos dos rotores percam o alinhamento com a força peso, implicando em uma ligeira perda de sustentação, bem como no aparecimento de componentes horizontais de força, que provocam um movimento lateral acelerado no quadricóptero.

Esse efeito pode ser observado na figura 19.5, onde ficam evidentes os movimentos acelerados nos sentidos negativo de x_E , e positivo de y_E , ambos condizentes com os valores iniciais positivos impostos para ϕ e θ . Adicionalmente, percebe-se a perda de sustentação evidenciada pelo valor decrescente da altitude h .

Já na figura 19.7, pode-se notar o efeito do arrasto aerodinâmico crescente com o quadrado do módulo da velocidade, fazendo com que esta tenda assintoticamente ao seu valor terminal.

Por fim, as figuras 19.6 e 19.8 indicam que as posições angulares bem como as velocidades angulares não apresentam variação.

Tabela 19.3 – Conjunto de condições iniciais 3

Coordenada x_E da posição	$x_E = 0$
Coordenada y_E da posição	$y_E = 0$
Altitude h_r	$h_r = 10 \text{ m}$
Coordenada ϕ da posição angular (Direção $O_B x_B$ – Rolagem)	$\phi = 0$
Coordenada θ da posição angular (Direção $O_B y_B$ – Arfagem)	$\theta = 0$
Coordenada ψ da posição angular (Direção $O_B z_B$ – Guinada)	$\psi = 0$
Coordenada u da velocidade (Direção $O_B x_B$)	$u = -2 \text{ m/s}$
Coordenada v da velocidade (Direção $O_B y_B$)	$v = 12 \text{ m/s}$
Coordenada w da velocidade (Direção $O_B z_B$)	$w = -4 \text{ m/s}$
Coordenada p da velocidade angular (Direção $O_B x_B$)	$p = 0$
Coordenada q da velocidade angular (Direção $O_B y_B$)	$q = 0$
Coordenada r da velocidade angular (Direção $O_B z_B$)	$r = 0$
Velocidade angular inicial do rotor 1	$\Omega_1 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 2	$\Omega_2 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 3	$\Omega_3 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 4	$\Omega_4 = \Omega_0$

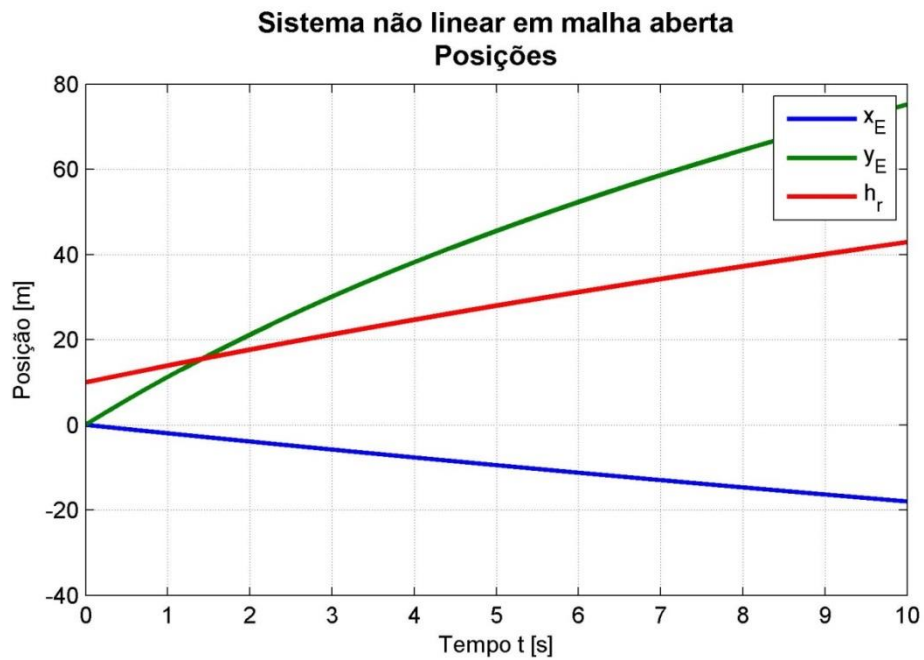


Figura 19.9 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 3

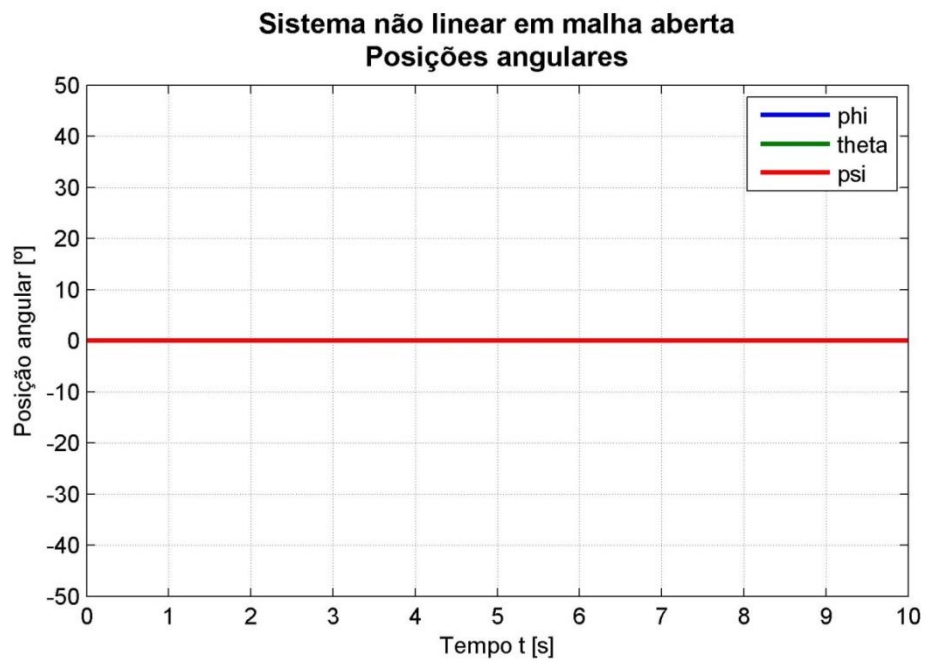


Figura 19.10 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 3

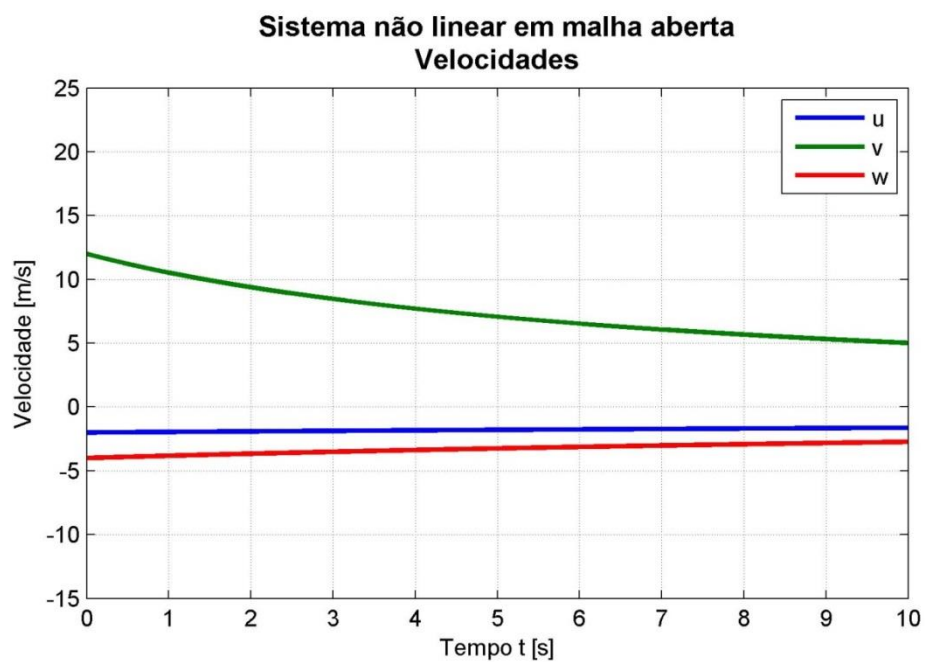


Figura 19.11 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 3

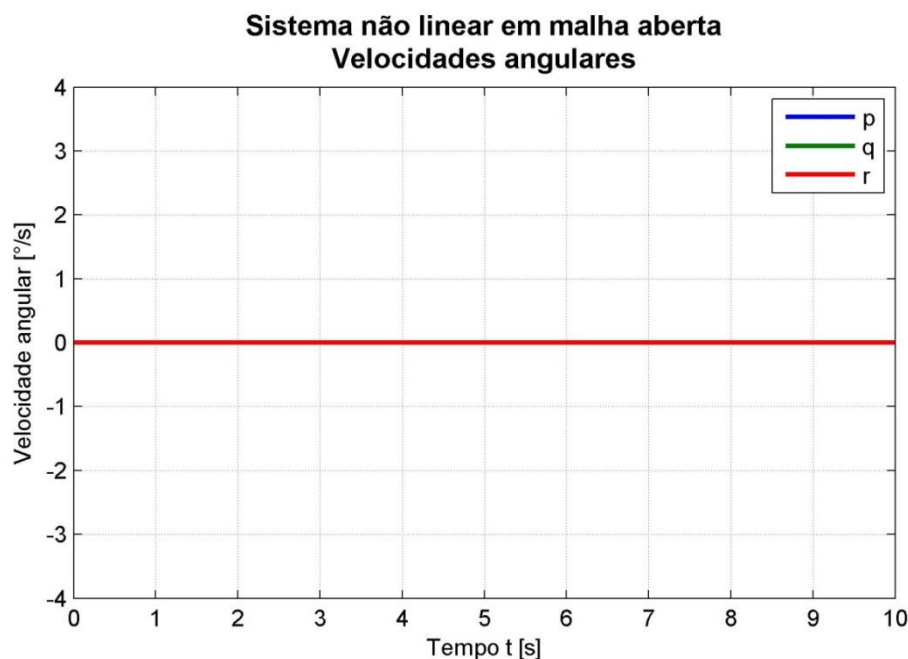


Figura 19.12 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 3

No terceiro conjunto de condições iniciais, foi imposta uma velocidade inicial com componentes não nulas.

A partir da figura 19.9, percebe-se que o movimento do quadricóptero está de acordo com os sentidos das velocidades iniciais impostas, ou seja, $u < 0$ resulta em movimento no sentido negativo de x_E , $v > 0$ resulta em movimento no sentido positivo de y_E , e $w < 0$ resulta em movimento no sentido positivo de h_r .

Na figura 19.11 nota-se mais uma vez o efeito do arrasto aerodinâmico que, desta vez, faz com que o módulo da velocidade tenda assintoticamente a zero. Vale ressaltar que neste caso a velocidade tende a zero, pois, ao contrario do que ocorre para o conjunto de condições iniciais 2, a resultante de forças aqui é nula.

Por fim, como no caso anterior, as figuras 19.10 e 19.12 indicam que as posições angulares bem como as velocidades angulares não apresentam variação.

Tabela 19.4 – Conjunto de condições iniciais 4

Coordenada x_E da posição	$x_E = 0$
Coordenada y_E da posição	$y_E = 0$
Altitude h_r	$h_r = 10 \text{ m}$
Coordenada ϕ da posição angular (Direção $O_B x_B$ – Rolagem)	$\phi = 0$
Coordenada θ da posição angular (Direção $O_B y_B$ – Arfagem)	$\theta = 0$
Coordenada ψ da posição angular (Direção $O_B z_B$ – Guinada)	$\psi = 0$
Coordenada u da velocidade (Direção $O_B x_B$)	$u = 0$
Coordenada v da velocidade (Direção $O_B y_B$)	$v = 0$
Coordenada w da velocidade (Direção $O_B z_B$)	$w = 0$
Coordenada p da velocidade angular (Direção $O_B x_B$)	$p = 3 \text{ } ^\circ/\text{s}$
Coordenada q da velocidade angular (Direção $O_B y_B$)	$q = -3 \text{ } ^\circ/\text{s}$
Coordenada r da velocidade angular (Direção $O_B z_B$)	$r = 1,5 \text{ } ^\circ/\text{s}$
Velocidade angular inicial do rotor 1	$\Omega_1 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 2	$\Omega_2 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 3	$\Omega_3 = \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 4	$\Omega_4 = \Omega_0$

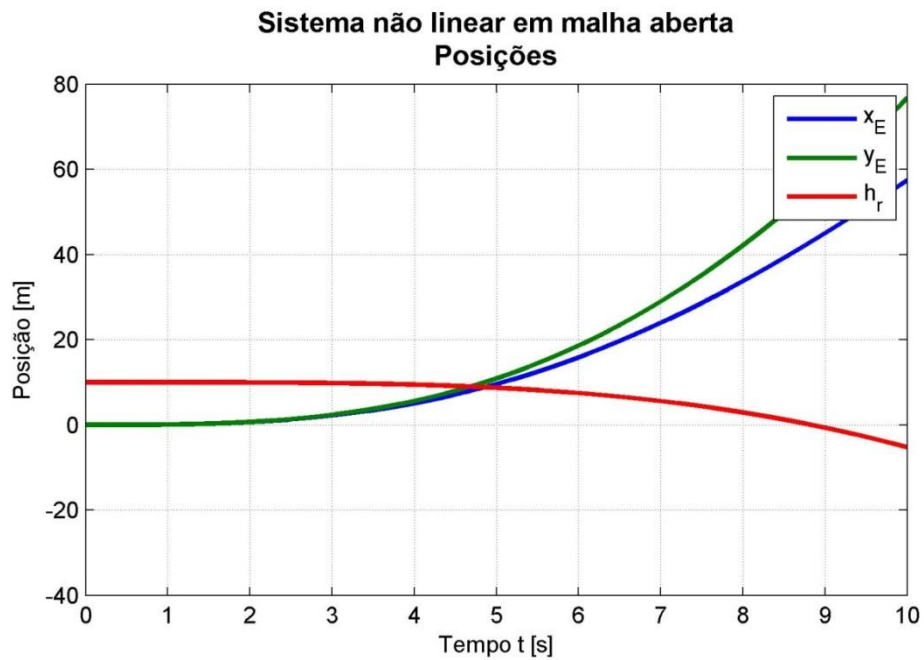


Figura 19.13 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 4

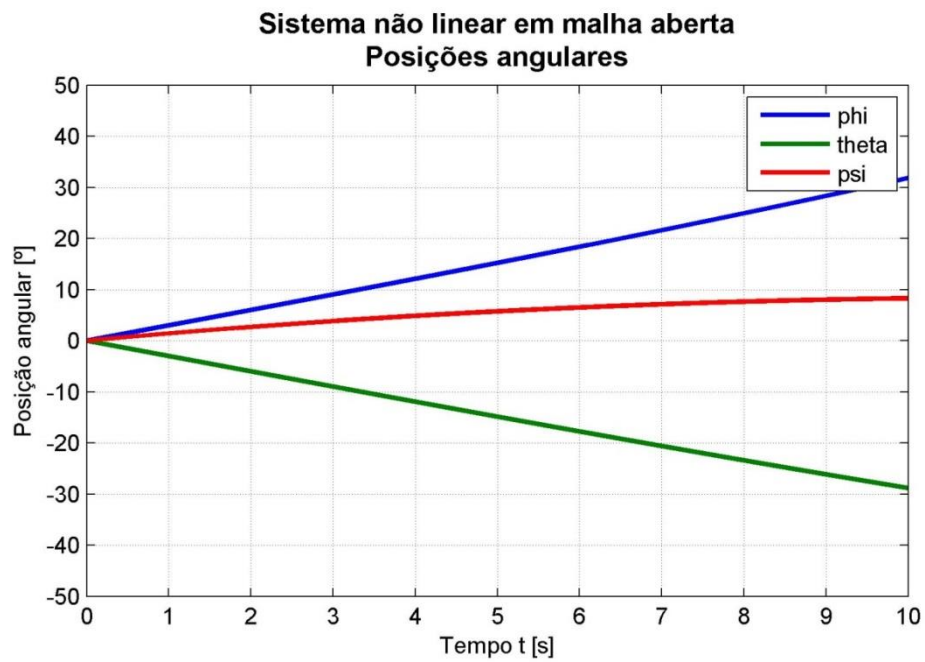


Figura 19.14 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 4

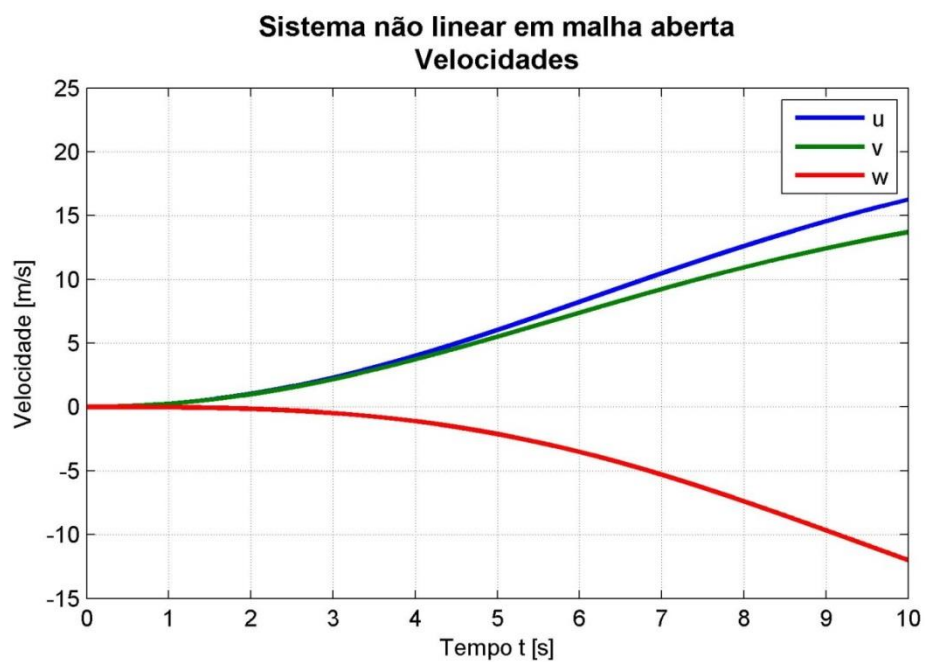


Figura 19.15 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 4

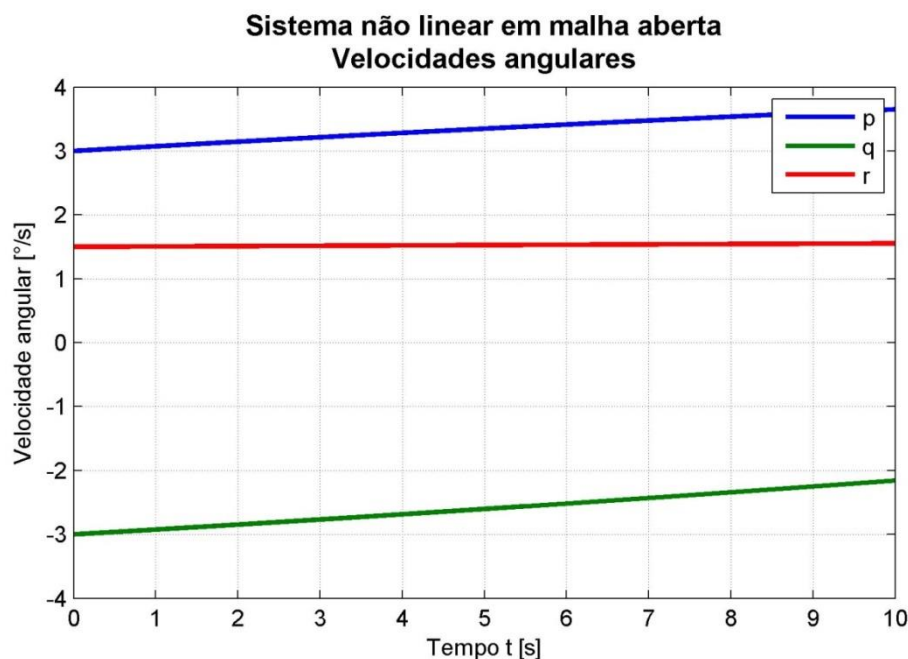


Figura 19.16 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 4

No quarto conjunto de condições iniciais, foi imposta uma velocidade angular inicial com componentes não nulas.

A partir da figura 19.14, percebe-se que o valor positivo da componente p gera um movimento de rotação com valores crescentes de ϕ , ao passo que o valor negativo da componente q gera um movimento com valores decrescentes de θ , conforme era esperado.

Esse desnivelamento progressivo faz com que a resultante horizontal da força que resulta do desalinhamento entre os empuxos dos rotores e a força peso, também aumente, implicando no movimento acelerado nos sentidos positivos das coordenadas x_E e y_E , bem como na perda de sustentação, conforme mostra a figura 19.13. Adicionalmente, o aumento da resultante faz com que a velocidade terminal varie e a tendência assintótica observada nas figuras 19.7 e 19.11 não seja observada na figura 19.15.

Na figura 19.16, pode-se notar que as componentes de velocidade angular p e q variam continuamente com o tempo, ao passo que a componente r permanece praticamente constante. Este resultado é condizente com o fato de que o momento resultante do arrasto aerodinâmico foi desprezado durante a elaboração do modelo.

Tabela 19.5 – Conjunto de condições iniciais 5

Coordenada x_E da posição	$x_E = 0$
Coordenada y_E da posição	$y_E = 0$
Altitude h_r	$h_r = 10\text{ m}$
Coordenada ϕ da posição angular (Direção $O_B x_B$ – Rolagem)	$\phi = 0$
Coordenada θ da posição angular (Direção $O_B y_B$ – Arfagem)	$\theta = 0$
Coordenada ψ da posição angular (Direção $O_B z_B$ – Guinada)	$\psi = 0$
Coordenada u da velocidade (Direção $O_B x_B$)	$u = 0$
Coordenada v da velocidade (Direção $O_B y_B$)	$v = 0$
Coordenada w da velocidade (Direção $O_B z_B$)	$w = 0$
Coordenada p da velocidade angular (Direção $O_B x_B$)	$p = 0$
Coordenada q da velocidade angular (Direção $O_B y_B$)	$q = 0$
Coordenada r da velocidade angular (Direção $O_B z_B$)	$r = 0$
Velocidade angular inicial do rotor 1	$\Omega_1 = 1,0272. \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 2	$\Omega_2 = 0,9738. \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 3	$\Omega_3 = 1,0428. \Omega_0$
Velocidade angular inicial do rotor 4	$\Omega_4 = 0,9732. \Omega_0$

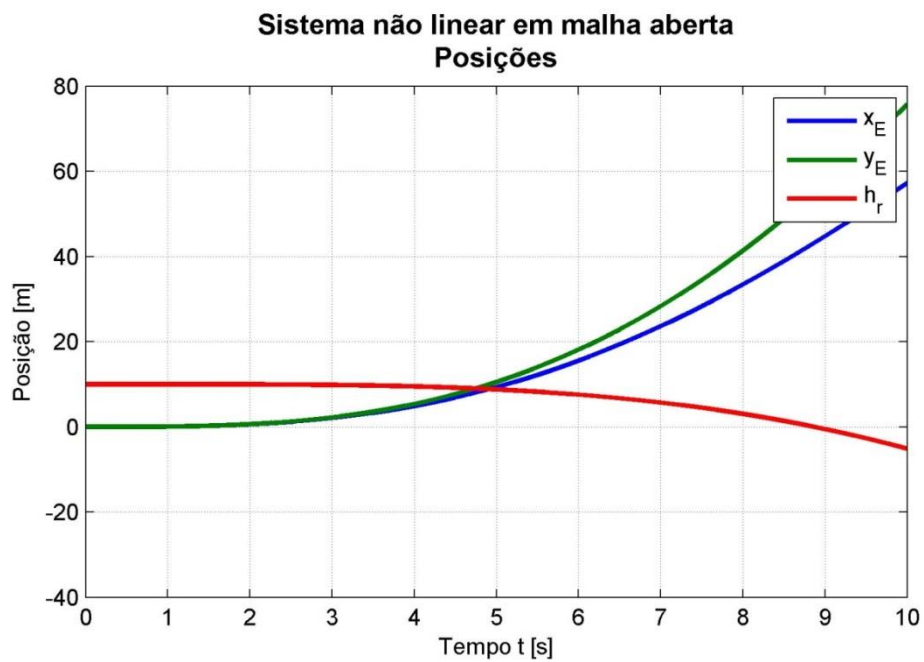


Figura 19.17 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 5

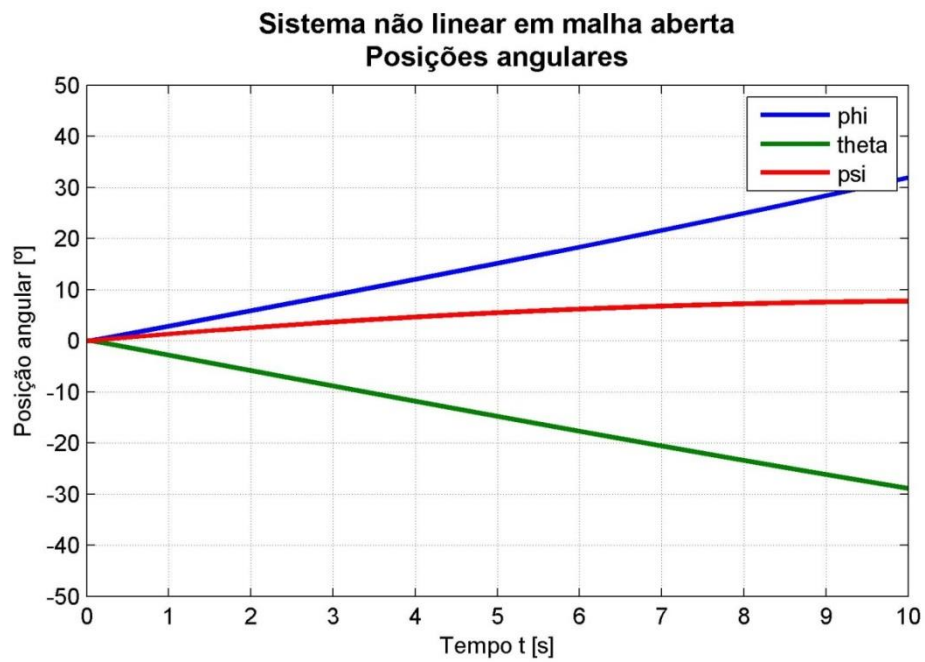


Figura 19.18 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 5

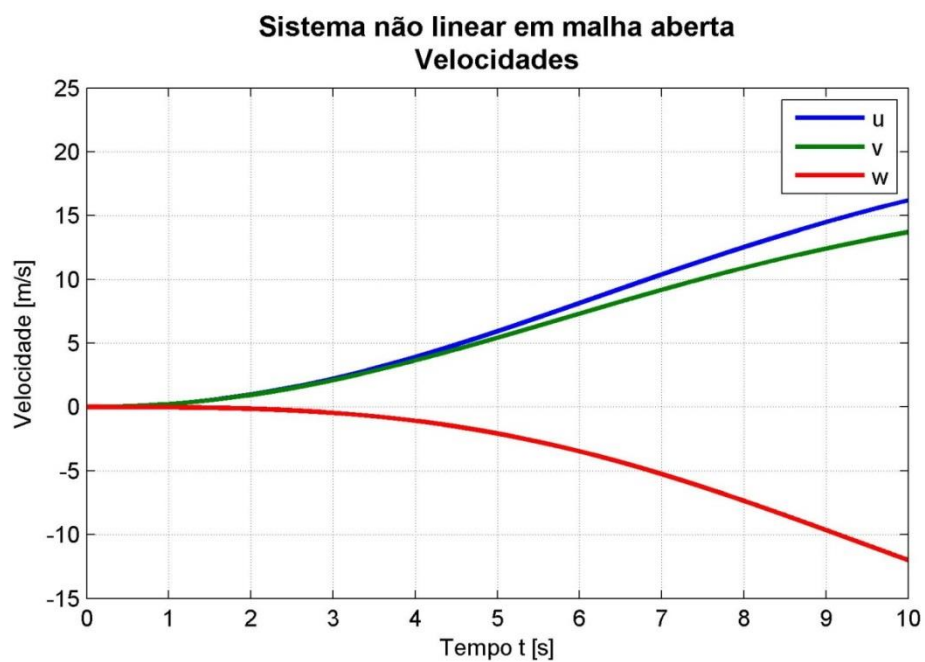


Figura 19.19 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 5

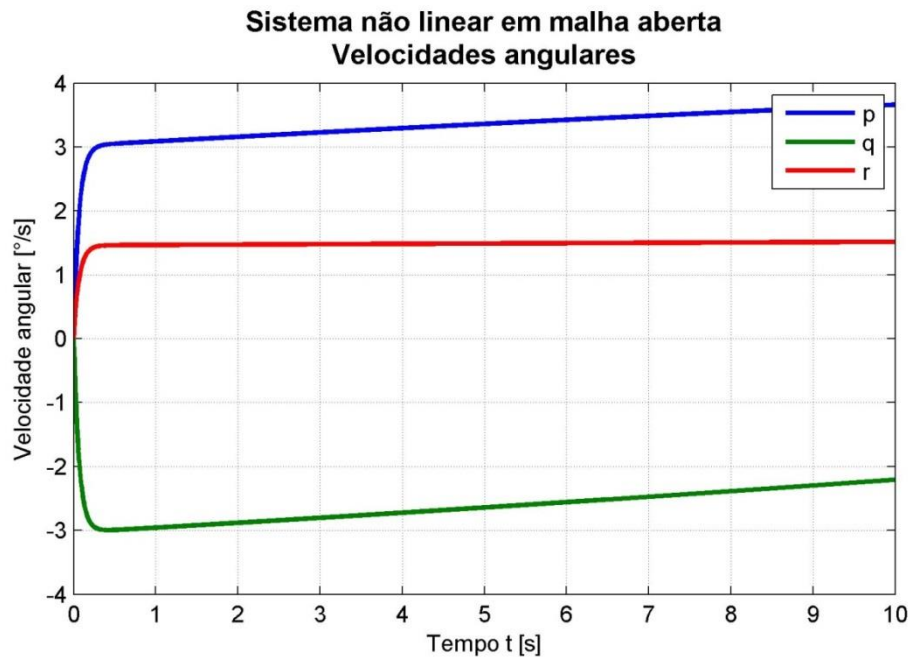


Figura 19.20 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 5

No quinto e último conjunto de condições iniciais, foram impostas sobre os motores elétricos, velocidades angulares iniciais diferentes da velocidade angular de equilíbrio.

Os resultados observados aqui são muito similares aos obtidos a partir do quarto conjunto de condições iniciais, o que pode ser constatado comparando-se as figuras 19.17, 19.18 e 19.19 às figuras 19.13, 19.14 e 19.15, respectivamente.

A diferença só pode ser claramente constatada quando são comparados os gráficos das velocidades angulares. Assim, na figura 19.20 observa-se que as componentes da velocidade angular partem de *zero* até valores próximos aos observados no gráfico da figura 19.16, ao passo que neste último, as componentes já são iniciadas com valores não nulos.

Durante o curto intervalo de tempo inicial em que p , q e r variam de forma mais abrupta, conforme visto na figura 19.20, a dinâmica dos motores elétricos faz com que as suas velocidades angulares se ajustem e atinjam o valor de equilíbrio Ω_0 .

Vale salientar que somente neste último caso analisado os momentos giroscópicos dos rotores geram algum efeito líquido sobre o quadricóptero, embora isso não possa ser observado a partir dos gráficos devido ao curto período de tempo

em que as rotações dos motores permanecem desequilibradas, e à pequena diferença entre elas.

Assim, com base nas observações realizadas para os cinco casos analisados, pode-se concluir que o modelo não linear do quadricóptero é válido, uma vez que este consegue reproduzir de forma satisfatória boa parte dos comportamentos dinâmicos relevantes esperados de um protótipo real, com as mesmas características e sob as mesmas condições.

Apenas a título de ilustração, são apresentadas novamente nas figuras 19.21, 19.22, 19.23 e 19.24 as respostas do sistema para as condições iniciais 1, porém desta vez simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores.

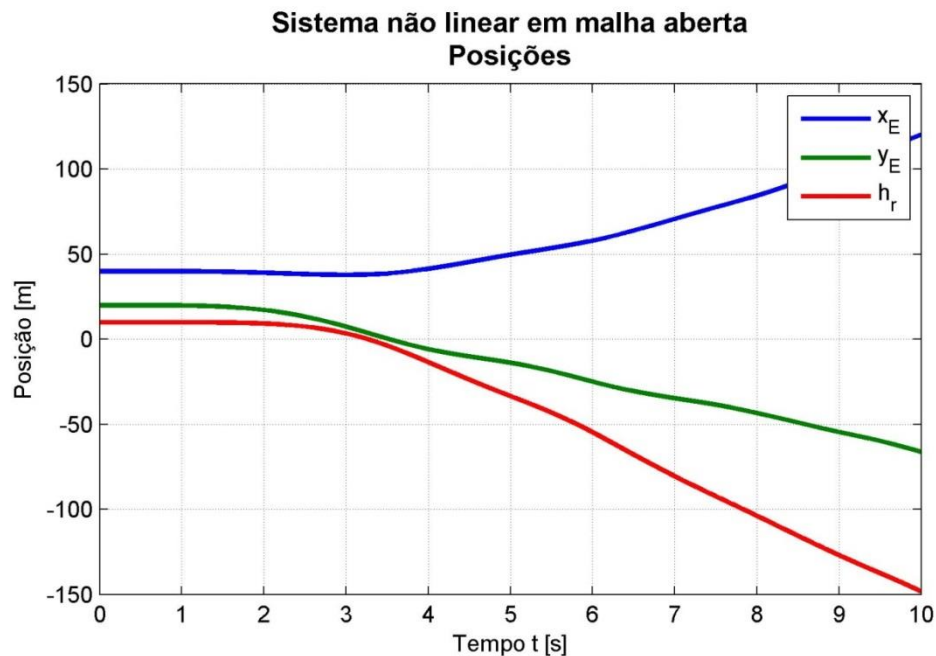


Figura 19.21 – Gráfico das posições para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores

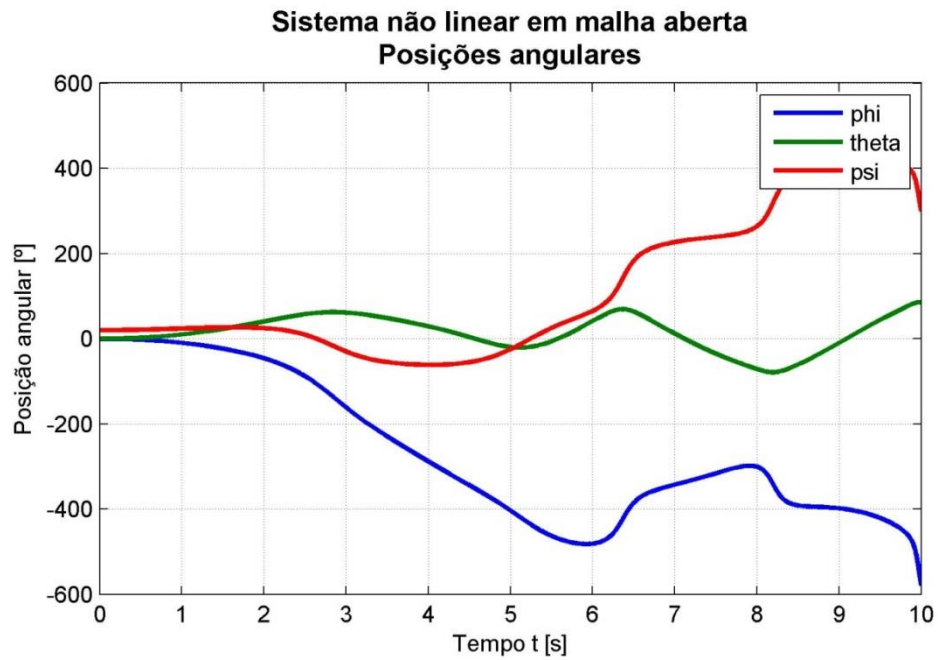


Figura 19.22 – Gráfico das posições angulares para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores

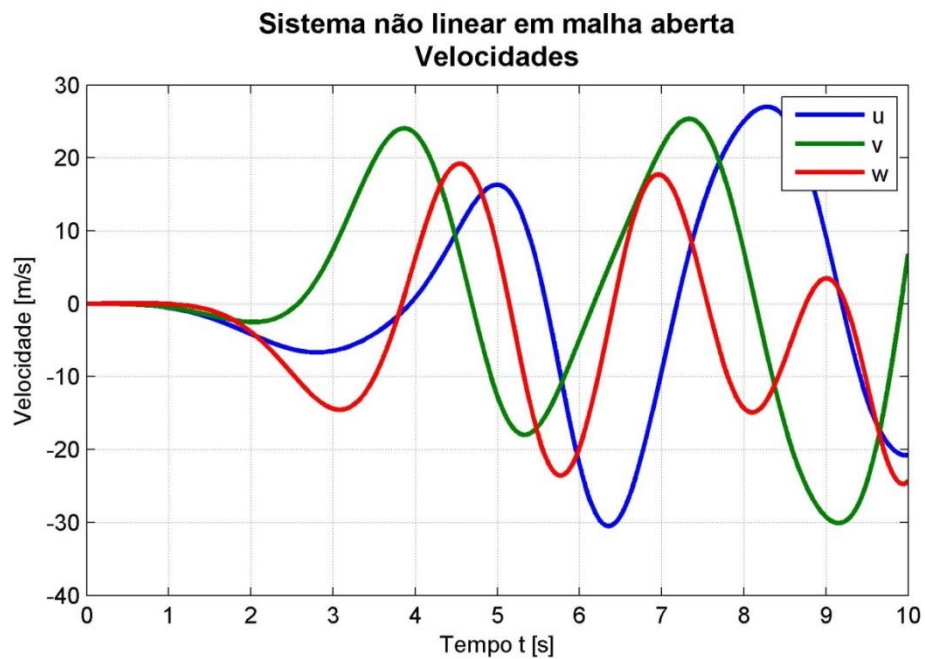


Figura 19.23 – Gráfico das velocidades para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores

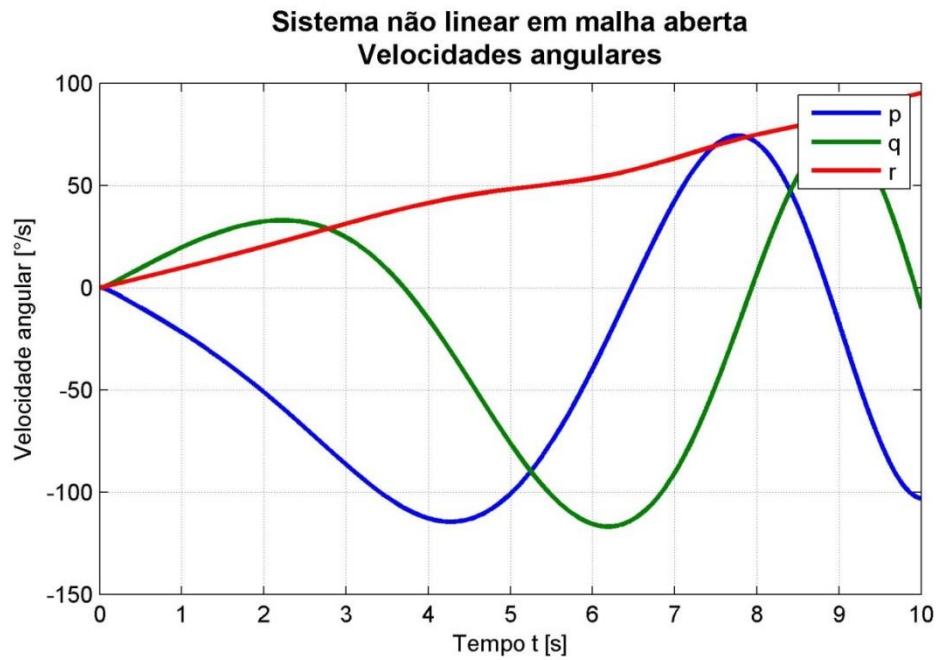


Figura 19.24 – Gráfico das velocidades angulares para o conjunto de condições iniciais 1 simulado com os parâmetros físicos individuais dos sistemas propulsores

Comparando-se as figuras 19.21, 19.22, 19.23 e 19.24 às figuras 19.1, 19.2, 19.3 e 19.4, respectivamente, fica claro o elevado efeito desestabilizador comentado no início da seção, que levou à utilização provisória de parâmetros físicos médios iguais para os sistemas propulsores durante a validação do modelo. Esse efeito adverso resulta do desbalanceamento entre as forças de empuxo, os torques de arrasto e os momentos giroscópicos de cada um dos quatro sistemas propulsores.

20 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO SISTEMA LINEAR EM MALHA ABERTA

Os polos do sistema, que correspondem aos autovalores da matriz de estado A , podem ser determinados calculando-se as raízes do polinômio característico obtido através da expressão

$$\lambda(s) = \det[s.I - A] \quad (20.1)$$

Os resultados são apresentados na tabela 20.1.

Tabela 20.1 – Polos do sistema em malha aberta

0
0
$0 + 0,0098i$
$0 - 0,0098i$
0
-15,3846
-15,8730
-14,7059
-14,9254

Pode-se notar que dentre os 9 polos encontrados tem-se quatro negativos, um par de polos complexos com parte real nula, e três nulos.

Assim, dada a existência de polos reais nulos múltiplos, pode-se afirmar que o sistema é instável (FRIEDLAND, 2005).

A figura 20.1 mostra a posição dos polos no plano complexo.

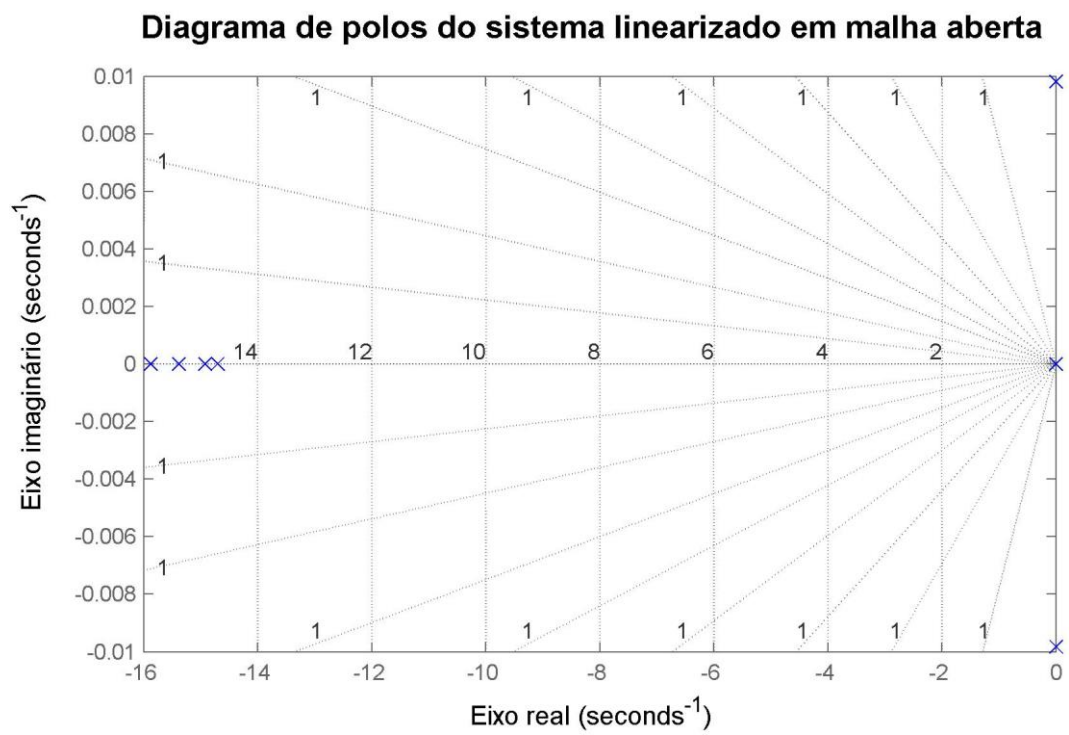


Figura 20.1 – Diagrama de polos do sistema linearizado em malha aberta

21 ANÁLISE DE CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Para um sistema representado em espaço de estados no qual a matriz de estado A possui dimensão $n \times n$, a matriz de entrada de controle B possui dimensão $n \times m$ e a matriz de saída C possui dimensão $p \times n$, podem-se definir as matrizes de controlabilidade

$$Ct = [B \quad A.B \quad A^2.B \quad \dots \quad A^{n-1}.B] \quad (21.1)$$

com dimensão $n \times n.m$, e de observabilidade

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (21.2)$$

com dimensões $n.p \times n$.

Assim, um dado sistema será dito controlável se o posto da matriz Ct for igual a n e, de maneira similar, será dito observável se o posto da matriz Ob for também igual a n .

Através da utilização de funções dedicadas do programa Matlab, calculou-se as matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema e, em seguida, o posto de cada uma delas. O resultado obtido foi

$$\text{posto de } Ct = 9$$

e

$$\text{posto de } Ob = 9$$

indicando, assim, a controlabilidade e a observabilidade de todas as variáveis de estado utilizadas aqui para descrever a dinâmica do quadricóptero.

22 CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE POLOS

Uma vez constatado que o sistema em questão é completamente controlável e observável, pode-se prosseguir com o projeto do sistema de controle, que neste trabalho será baseado na alocação de polos.

O objetivo desse sistema de controle é levar o quadricóptero à condição de voo pairado, na qual a aeronave está nivelada e com velocidades angulares nulas, a partir de uma condição inicial arbitrária, mas ainda dentro dos limites tangíveis pelo modelo linearizado.

Vale ressaltar que o estado em condição de voo pairado corresponde à origem da representação em espaço de estados, de modo que o sistema de controle proposto aqui é um regulador, em oposição ao seguidor que será discutido futuramente.

Neste ponto do trabalho será considerado que todo o estado está disponível, ou seja, tem-se o conhecimento, a cada instante, de todas as variáveis de estado.

O desenvolvimento de sistemas de controle pelo método da alocação de polos parte do princípio de que as posições dos polos relativas ao plano complexo são responsáveis por todas as características do comportamento dinâmico da planta em questão. Isso torna possível modificar a natureza de suas respostas, alterando-se a posição dos polos do sistema em malha fechada.

A escolha dos novos polos deve ser feita de tal forma a garantir a estabilidade, o que se consegue fazendo com que todas as parcelas reais sejam negativas, e a melhorar o desempenho segundo algum critério, que no caso será a diminuição do tempo necessário para que a planta entre em equilíbrio.

O novo conjunto de polos proposto é apresentado na tabela 22.1.

Tabela 22.1 – Novo conjunto de polos

$-9 + 6i$
$-9 - 6i$
$-5 + 3i$
$-5 - 3i$
-8
$-7 + 9i$
$-7 - 9i$
$-7 + 9i$
$-7 - 9i$

De posse dos polos realocados, pode-se proceder com o desenvolvimento da lei de controle.

Considerando-se um sistema cuja equação de estado é dada por $\dot{x} = A.x + B.u$, pode-se definir uma ação de controle proporcional ao vetor de estado, tal que

$$u = -K.x \quad (22.1)$$

onde K é a matriz de ganhos de controle, a ser obtida a partir da matriz de estado A , da matriz de entrada de controle B e dos polos realocados do sistema. Neste trabalho, a determinação de K será feita numericamente através de uma função dedicada do programa Matlab, a partir dos parâmetros supracitados.

Substituindo-se a ação de controle proporcional na equação de estados, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + B.u \\ \rightarrow \dot{x} &= A.x - B.K.x \\ \rightarrow \dot{x} &= (A - B.K).x \\ \rightarrow \dot{x} &= F.x \end{aligned} \quad (22.2)$$

com

$$\rightarrow F = A - B.K$$

Na simulação computacional cujos resultados serão apresentados a seguir, a ação de controle obtida foi realimentada no sistema não linear, que por sua vez foi

integrado no tempo empregando-se o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Assim, foi possível obter uma resposta mais realista do que a que teria sido obtida a partir da simulação do modelo linearizado. Vale ressaltar que para esta simulação, considerou-se que todo o estado estava disponível para a geração da ação de controle.

As condições iniciais utilizadas estão apresentadas na tabela 22.2, e os resultados obtidos estão apresentados nas figuras 22.1, 22.2 e 22.3.

Tabela 22.2 – Condições iniciais para o sistema em malha fechada

Coordenada ϕ da posição angular (Direção $O_B x_B$ – Rolagem)	$\phi = 5^\circ$
Coordenada θ da posição angular (Direção $O_B y_B$ – Arfagem)	$\theta = 10^\circ$
Coordenada p da velocidade angular (Direção $O_B x_B$)	$p = 20^\circ/s$
Coordenada q da velocidade angular (Direção $O_B y_B$)	$q = 15^\circ/s$
Coordenada r da velocidade angular (Direção $O_B z_B$)	$r = 10^\circ/s$
Velocidade angular do rotor 1	$\Delta\Omega_1 = 0$
Velocidade angular do rotor 2	$\Delta\Omega_2 = 0$
Velocidade angular do rotor 3	$\Delta\Omega_3 = 0$
Velocidade angular do rotor 4	$\Delta\Omega_4 = 0$

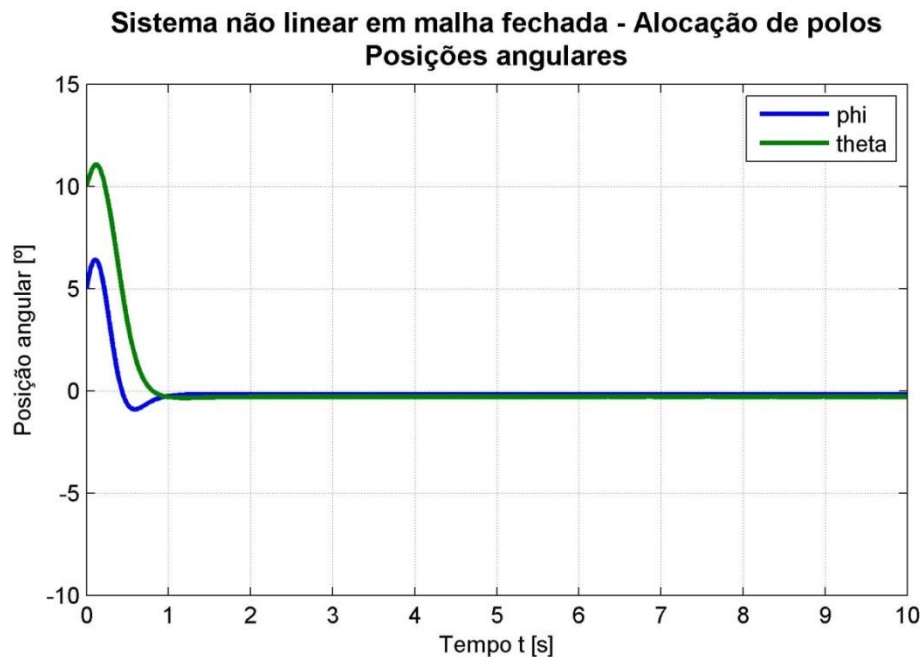


Figura 22.1 – Gráfico das posições angulares para a alocação de polos

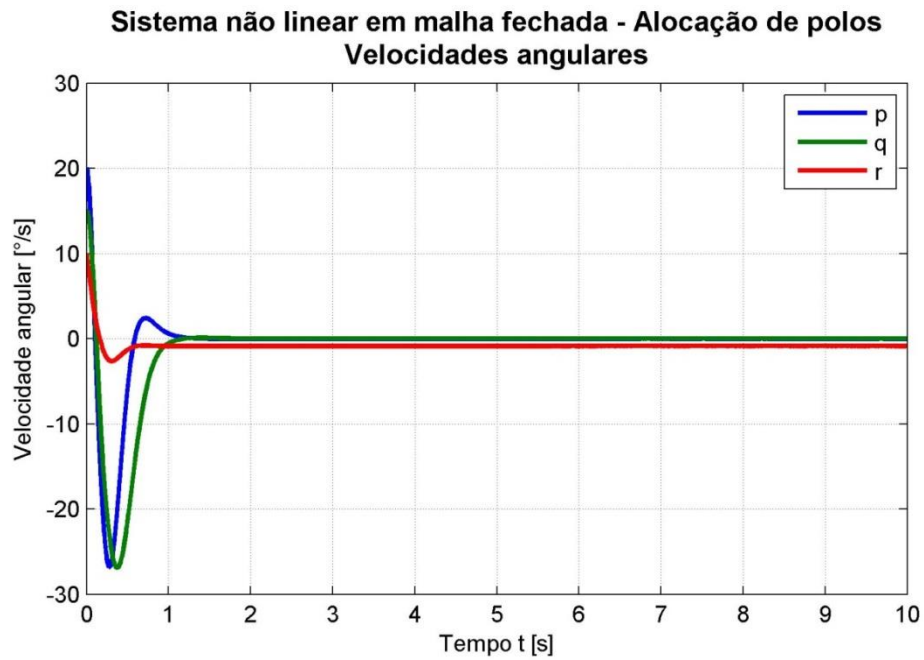


Figura 22.2 – Gráfico das velocidades angulares para a alocação de polos

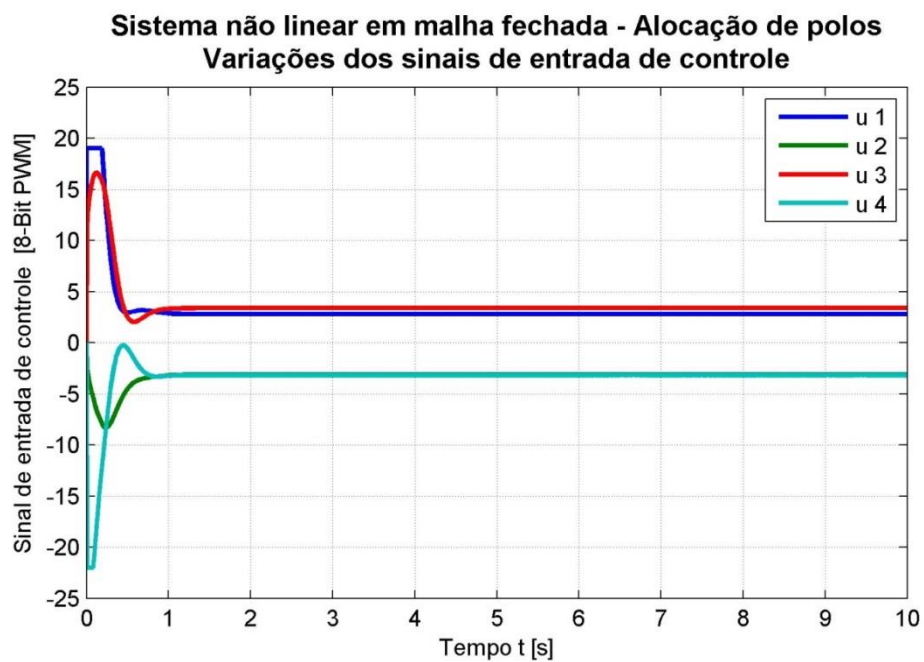


Figura 22.3 – Gráfico dos sinais de entrada de controle para a alocação de polos

A partir da figura 22.1 podem-se ver claramente os ângulos ϕ e θ estabilizando-se em torno do zero em aproximadamente 1 s, conforme desejado.

Já a partir da figura 22.2 podem-se ver as velocidades angulares p e q estabilizando-se em torno do *zero* e a velocidade angular r estabilizando-se um pouco abaixo do *zero*, em aproximadamente $-1^\circ/s$. O desvio no ponto de equilíbrio da coordenada r se deve a não linearidade do sistema. Esse fato foi comprovado em simulações preliminares onde a mesma ação de controle agindo sobre o sistema linearizado não apresentou qualquer desvio entre as variáveis de estado controladas e as respectivas referências (origem do espaço de estados) após a estabilização.

Por fim, a partir da figura 22.3 podem-se ver os sinais de entrada de controle. Nota-se que nos primeiros décimos de segundo da simulação ocorreu uma breve saturação nos sinais u_1 e u_4 . Tanto na simulação apresentada quanto no sistema real, o efeito da saturação dos motores elétricos é a ausência de respostas para aumentos adicionais nos sinais de controle. Em outras palavras, uma vez atingidas as velocidades angulares máximas de cada motor, estas não mais variam para sinais de controles iguais ou superiores aos respectivos valores de saturação. Assim, não existe risco da ocorrência de avarias nos motores, nem de respostas abruptas do sistema quando este satura.

23 CONTROLE COM OBSERVADOR DE ESTADO

Embora seja possível amostrar todas as variáveis de estado utilizadas na descrição da dinâmica do quadricóptero, esta não é a realidade do protótipo construído. Neste, apenas as posições angulares ϕ e θ , e as velocidades angulares p , q e r são direta ou indiretamente monitoradas, de modo que as velocidades angulares dos rotores $\Delta\Omega_i$ não estarão disponíveis.

Para solucionar esse problema, será desenvolvido e simulado nesta seção o conceito de observador de estado, para que, a partir das variáveis de saída efetivamente amostradas, consiga-se gerar uma estimativa do estado completo, que poderá ser então usada para a obtenção do sinal de controle.

Considerando-se a equação de estado $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ do sistema em questão, pode-se definir a equação do observador como

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A} \cdot \hat{x} + \hat{B} \cdot u + K_o \cdot y$$

onde $\hat{x}$ é uma estimativa para x , K_o é a matriz de ganhos do observador e as matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são análogas às matrizes A e B da equação de estados do sistema.

O erro associado à estimativa do observador é definido como

$$e = x - \hat{x} \quad (23.1)$$

Uma vez que quanto melhor a estimativa, mais precisa pode ser a ação de controle gerada a partir dela, convém-se reduzir ao máximo o erro, de preferência fazendo-o tender assintoticamente a zero. Para tanto, deve-se proceder determinando os parâmetros desconhecidos da equação do observador.

Primeiramente, subtrai-se da equação de estado do sistema a equação do observador

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A \cdot x + B \cdot u - \hat{A} \cdot \hat{x} - \hat{B} \cdot u - K_o \cdot y$$

Notando-se que $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ e que $y = C \cdot x$ (lembre-se que $D = 0$), pode-se rearranjar a equação anterior na forma

$$\dot{e} = (A - \hat{A} - K_o.C).x + (B - \hat{B}).u + \hat{A}.e$$

Em seguida, impõe-se que o erro e vá assintoticamente à zero independentemente dos valores de x e u fazendo-se

$$A - \hat{A} - K_o.C = 0$$

$$B - \hat{B} = 0$$

de modo que

$$\hat{A} = A - K_o.C$$

$$\hat{B} = B$$

Assim, as equações diferenciais do observador e do erro são dadas por, respectivamente,

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_o.C).\hat{x} + B.u + K_o.y \quad (23.2)$$

$$\dot{e} = (A - K_o.C).e \quad (23.3)$$

A determinação da matriz de ganhos do observador K_o pode ser feita através da escolha e subsequente alocação dos seus polos, lembrando que o erro entre o estado e sua estimativa deve diminuir o mais rápido possível.

Uma forma de se satisfazer essa condição é fazendo com que os polos do observador fiquem à esquerda dos polos do sistema observado. Assim, no presente trabalho, os polos do observador serão gerados a partir dos polos do sistema observado em malha fechada, multiplicando-se os últimos por uma constante. Em particular, serão usados os polos da tabela 22.1, os quais serão multiplicados por 2,43.

Por fim, a lei de controle do regulador é obtida mantendo-se a matriz de ganhos de controle K , e fazendo-se a realimentação com o estado reconstruído

$$u = -K.\hat{x} \quad (23.4)$$

Vale ressaltar que a matriz de ganhos de controle K pode ser determinada assumindo-se que todo o estado está disponível, de forma análoga à conduzida na seção 22.

Para a implementação do observador de estado, deve-se obter a sua equação em termos do estado reconstruído $\hat{x}$ e das leituras y dos sensores. Para tanto, basta a substituição da equação 23.4 na equação 23.2

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - K_o.C).\hat{x} + B.u + K_o.y \\ \rightarrow \dot{\hat{x}} &= (A - K_o.C - B.K).\hat{x} + K_o.y \\ \rightarrow \dot{\hat{x}} &= M_o.\hat{x} + K_o.y\end{aligned}\tag{23.5}$$

onde

$$M_o = A - K_o.C - B.K$$

Tanto na simulação em Matlab quanto no código de controle embarcado, será empregada a solução do equivalente discreto da equação 23.5, com incrementos de tempo aproximadamente uniformes ditados pela velocidade do hardware, utilizando-se o algoritmo representado pelas equações 14.21, 14.22 e 14.23. Observando-se as analogias e fazendo-se as substituições apropriadas obtêm-se

$$\Phi_o = I + M_o.\Delta t + \frac{M_o^2.\Delta t^2}{2!} + \frac{M_o^3.\Delta t^3}{3!} + \dots + \frac{M_o^n.\Delta t^n}{n!}\tag{23.6}$$

$$\Gamma_o = I.\Delta t + \frac{M_o.\Delta t^2}{2!} + \frac{M_o^2.\Delta t^3}{3!} + \frac{M_o^3.\Delta t^4}{4!} + \dots + \frac{M_o^n.\Delta t^{n+1}}{(n+1)!}\tag{23.7}$$

$$\hat{x}(k+1) = \Phi_o.\hat{x}(k) + \Gamma_o.K_o.y(k)\tag{23.8}$$

Com base, mais uma vez, nas condições iniciais apresentadas na tabela 22.2, procedeu-se com a simulação do modelo não linear em malha fechada, utilizando-se a matriz ganhos de controle K , obtida por alocação de polos na seção 22, porém gerando-se a ação de controle a partir do estado reconstruído pelo observador de estado. Da mesma forma que na seção 22, a ação de controle foi realimentada no sistema não linear, que por sua vez foi integrado no tempo empregando-se o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. As condições iniciais do observador foram deixadas fora do ponto de equilíbrio, para que se possa verificar que o erro e tende a zero.

Os resultados obtidos estão apresentados nas figuras 23.1, 23.2 e 23.3.

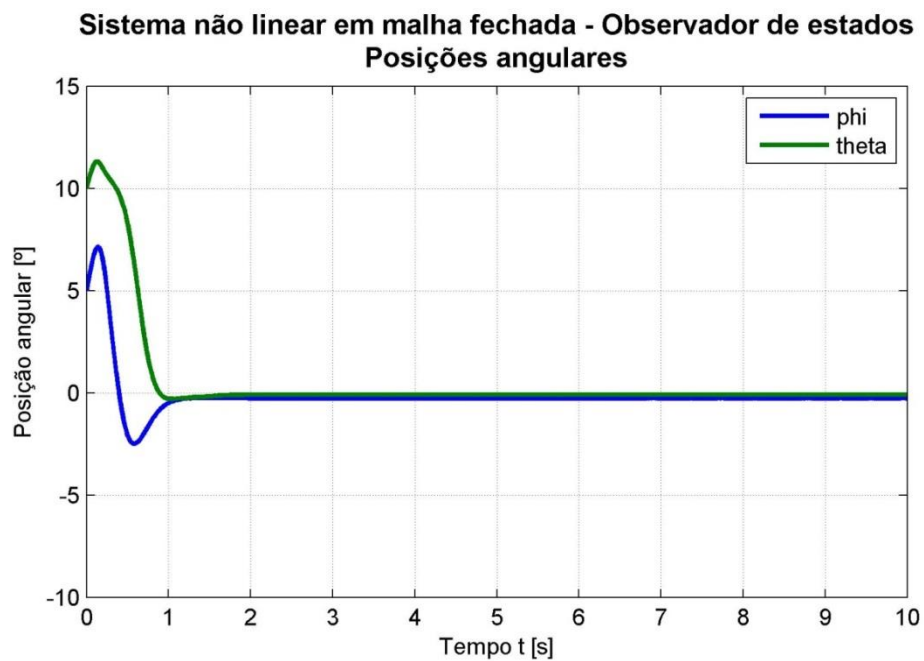


Figura 23.1 – Gráfico das posições angulares para o observador de estados

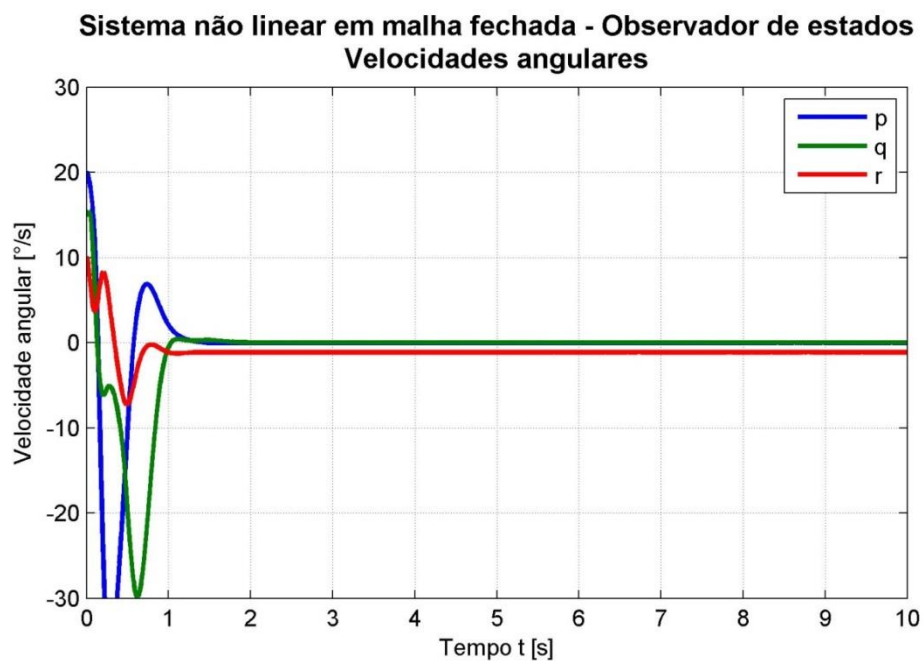


Figura 23.2 – Gráfico das velocidades angulares para o observador de estados

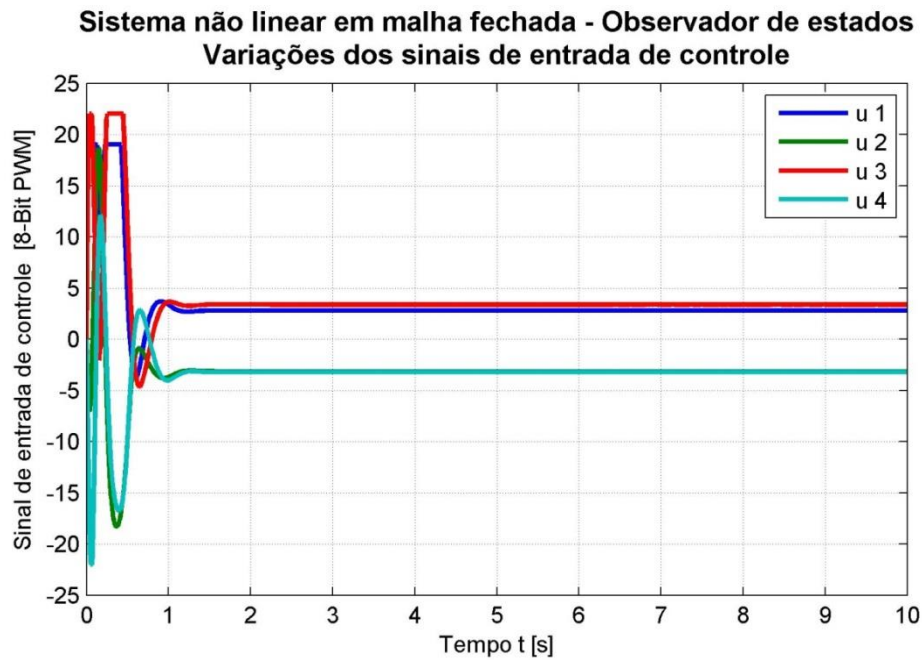


Figura 23.3 – Gráfico dos sinais de entrada de controle para o observador de estados

Pode-se notar que as posições angulares obtidas a partir da simulação do sistema com observador de estado e apresentadas na figura 23.1, são muito parecidas, ao longo de todo o intervalo de tempo simulado, com as obtidas na seção 22. Já os trechos transientes das velocidades angulares apresentadas na figura 23.2, bem como dos sinais de entrada de controle apresentados na figura 23.3, diferem sensivelmente das respectivas grandezas, nos mesmos trechos, obtidas na simulação da seção 22, onde se supôs o conhecimento do estado completo. No entanto, depois de atingido o equilíbrio, as velocidades angulares e os sinais de entrada de controle de ambas as simulações tendem aos mesmos valores.

As diferenças iniciais observadas nas magnitudes das respostas se devem ao fato de as condições iniciais do observador terem sido deixadas fora das respectivas posições de equilíbrio ou, em outras palavras, com erros iniciais diferentes de *zero* em todas as variáveis de estado. O fato de o sistema ter se estabilizado mesmo assim, indica que o erro está de fato tendendo a *zero*, conforme esperado.

24 SEGUIDOR DE REFERÊNCIAS

Nesta seção será desenvolvido um sistema de controle capaz de fazer a planta seguir um sinal de referência diferente da origem do espaço de estados, de forma a dar manobrabilidade ao quadricóptero, permitindo-o realizar trajetórias diversas, através de alterações convenientes dessa referência. Note que até o momento tudo o que foi feito foi garantir a estabilidade da aeronave numa situação de voo pairado.

Sendo $\mathbf{x}_r$ o vetor de referência a ser acompanhado e $\mathbf{x}$ as variáveis de estado, pode-se definir o erro do acompanhamento como

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r \quad (24.1)$$

Uma primeira tentativa de determinação da ação de controle, que faria a planta acompanhar o sinal de referência, seria através da realimentação dessa ação pelo erro do seguidor

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_r$$

No entanto, pode-se demonstrar (FRIEDLAND, 2005) que uma ação de controle desse tipo leva a um erro em regime permanente diferente de zero.

Para solucionar esse problema, deve-se encontrar o estado em regime permanente, $\mathbf{x}_{rp}$, e aplicar uma ação de controle adicional, $\mathbf{u}_{rp}$, que leve o estado até a referência desejada, de modo que

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{rp} + \mathbf{u}_{rp} \quad (24.2)$$

Como se espera que o erro em regime permanente $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{rp}$ se anule, tem-se que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{rp}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{rp}$$

Aplicando-se o resultado anterior nas equações de estado 14.1 e de saída 14.2 do sistema, obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{rp} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{rp} \\ \mathbf{y}_{rp} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_{rp} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_{rp}\end{aligned}$$

Considerando-se que o estado, a ação de controle, e a saída em regime permanente sejam proporcionais ao vetor de referência, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{rp} &= \mathbf{N}_x \cdot \mathbf{x}_r \\ \mathbf{u}_{rp} &= \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_r \\ \mathbf{y}_{rp} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_r\end{aligned}$$

obtém-se que

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}_x \cdot \mathbf{x}_r + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_r \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_r &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_x \cdot \mathbf{x}_r + \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_r\end{aligned}$$

Reorganizando-se o sistema acima, nas incógnitas $\mathbf{N}_x$ e $\mathbf{N}_u$, em notação matricial para o caso em que $\mathbf{x}_r \neq \mathbf{0}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Se a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ for inversível, a solução será dada simplesmente por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (24.3)$$

Caso a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ não seja inversível, pode-se obter uma solução $\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix}$ utilizando-se o conceito de pseudo-inversa.

De posse dos valores encontrados para $\mathbf{N}_x$ e $\mathbf{N}_u$, bem como das relações $\mathbf{x}_{rp} = \mathbf{N}_x \cdot \mathbf{x}_r$ e $\mathbf{u}_{rp} = \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_r$, obtém-se a ação de controle procurada, que fará a planta acompanhar o sinal de referência constante

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}.\mathbf{x} + (\mathbf{K}.\mathbf{N}_x + \mathbf{N}_u).\mathbf{x}_r \quad (24.4)$$

ou utilizando-se o conceito de observador de estados

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}.\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}.\mathbf{N}_x + \mathbf{N}_u).\mathbf{x}_r \quad (24.5)$$

Para facilitar a implementação do seguidor de referência, propõe-se o rearranjo da equação 24.5 a seguir

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}.\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}.\mathbf{N}_x + \mathbf{N}_u).\mathbf{x}_r \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}.\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_r.\mathbf{x}_r \end{aligned} \quad (24.6)$$

onde

$$\mathbf{N}_r = \mathbf{K}.\mathbf{N}_x + \mathbf{N}_u$$

Tomando-se condições iniciais nulas (voo pairado), procedeu-se com a simulação do modelo não linear em malha fechada, utilizando-se a matriz ganhos de controle $\mathbf{K}$, obtida por alocação de polos na seção 22. A ação de controle foi gerada a partir do estado reconstruído pelo observador de estado, mantendo-se a matriz de ganhos do observador $\mathbf{K}_o$ da seção 23, e incorporando-se o seguidor de referência. Da mesma forma que nas seções 22 e 23, a ação de controle obtida foi realimentada no sistema não linear, que por sua vez foi integrado no tempo empregando-se o Método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Os resultados obtidos estão apresentados nas figuras 24.1, 24.2 e 24.3.

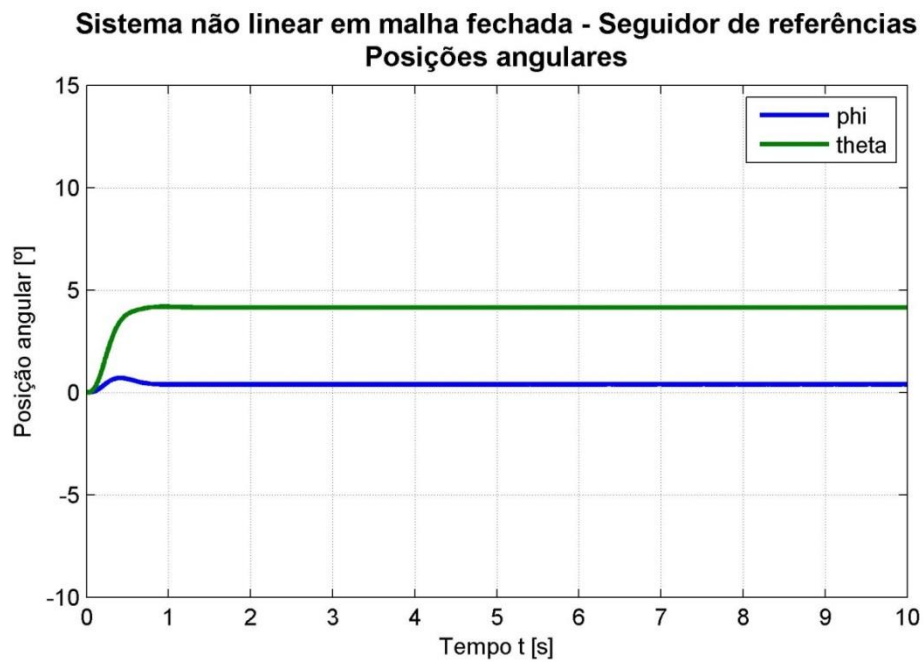


Figura 24.1 – Gráfico das posições angulares para o seguidor de referências

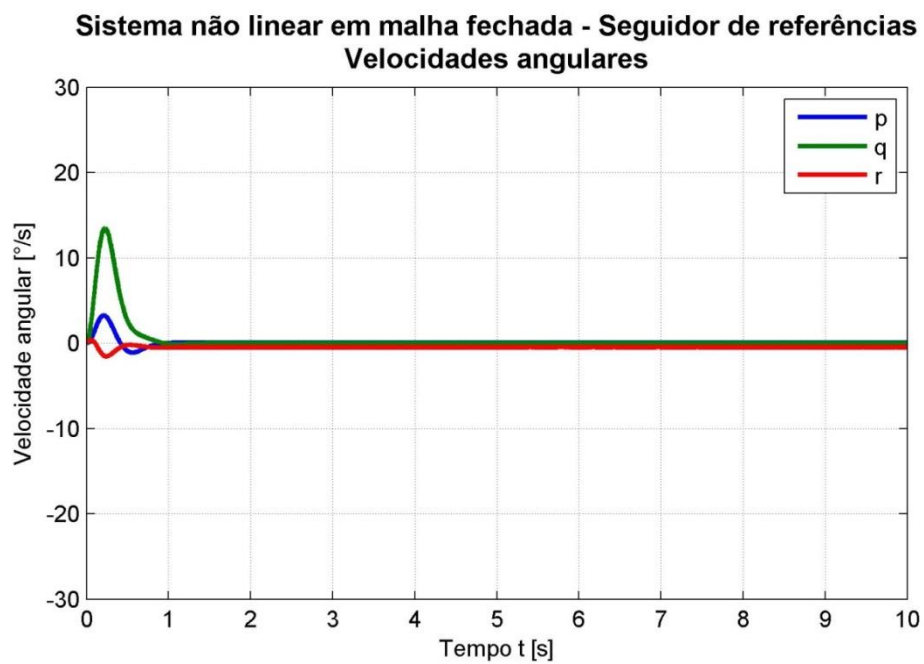


Figura 24.2 – Gráfico das velocidades angulares para o seguidor de referências

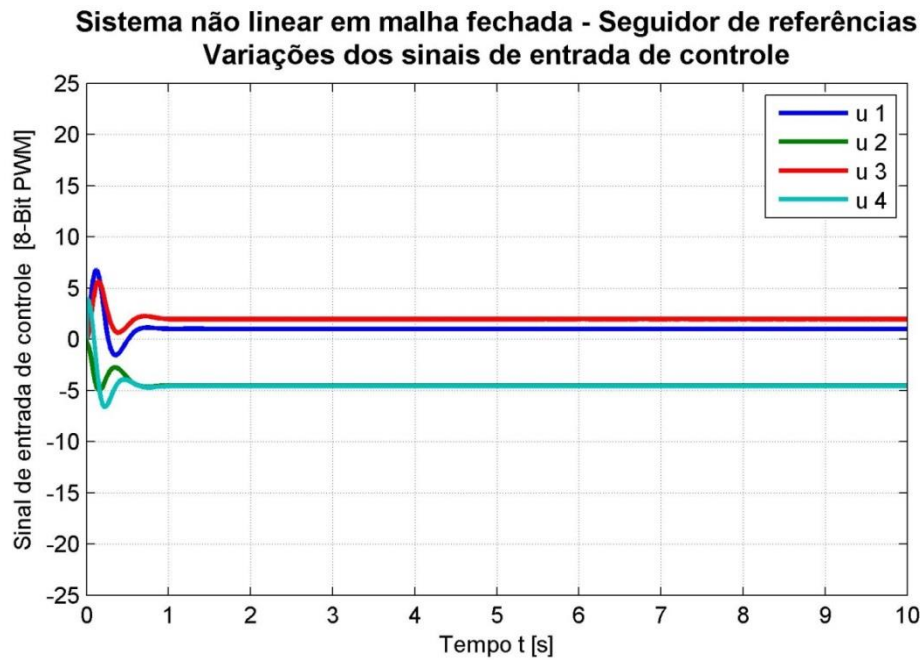


Figura 24.3 – Gráfico dos sinais de entrada de controle para o seguidor de referências

A partir da figura 24.1 observa-se que ϕ parece seguir a referência 0,4 ao passo que θ parece seguir a referência 4,1. No entanto, as referências implementadas foram, respectivamente, zero e 3,0. Assim conclui-se que o seguidor de referência apresenta um erro em regime permanente quando aplicado ao sistema não linear, sendo esse erro tanto maior, quanto maior for o distanciamento da referência imposta em relação à origem do espaço de estados. De fato, aplicando-se o mesmo seguidor de referência ao sistema linear a partir do qual foi obtido, com as mesmas condições iniciais e referências a serem seguidas, não se observou qualquer erro em regime permanente, comprovando-se que o desvio resulta da sua aplicação sobre o sistema não linear.

Já a partir das figuras 24.2 e 24.3, pode-se notar que as oscilações das velocidades e dos sinais de entrada de controle foram sutis, quando comparadas aos resultados obtidos da seção 23, ou mesmo da seção 22. Isso se deve ao fato de que, na presente seção, as condições iniciais impostas já representavam o equilíbrio de voo pairado e a referência imposta não diferia muito dessa situação. Adicionalmente, não foi introduzido um erro inicial entre as variáveis de estado reconstruídas e as variáveis de estado reais.

25 CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO

25.1 Placa de circuito

Para a interligação dos diversos dispositivos eletrônicos embarcados que compõem o protótipo ao Arduino DUE, foi necessária a confecção da placa de circuito indicada na figura 25.1.

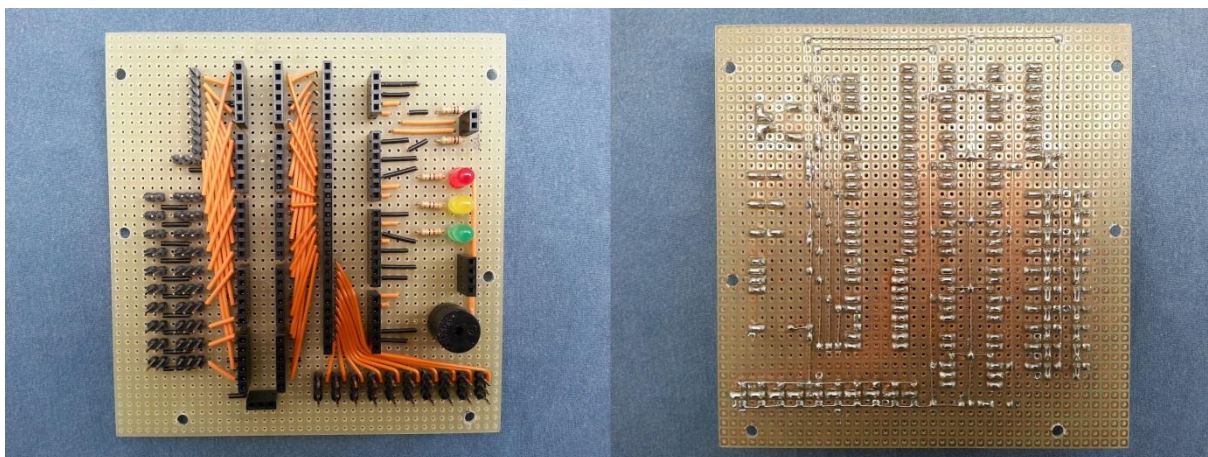


Figura 25.1 – Placa de circuito para a interligação dos dispositivos eletrônicos ao Arduino DUE

Para a conexão do acelerômetro BMA180 (BOSCH, 2010), do giroscópio ITG3205 (INVENSENSE, 2010) e dos sensores de refletância QTR-1A (POLOLU, 2014), seguiu-se estritamente as recomendações presentes nos respectivos *datasheets*. Adicionalmente, os conectores do acelerômetro e do giroscópio foram posicionados em orientações convenientes, fazendo com que as direções das tomadas de medidas de cada um desses sensores fiquem concordantes.

Com o intuito de facilitar modificações e expansões futuras, bem como de melhor aproveitar o elevado potencial do Arduino DUE, foram incluídas na placa de circuito conectores que permitem o acoplamento de receptores de rádio controle com até dez canais. Incorporaram-se também os conectores necessários para a utilização em paralelo de até dez ESCs e dez sensores de refletância, permitindo assim a utilização de até dez motores. Os conectores destinados aos ESCs, podem também ser utilizados para a instalação de servos motores de diversas capacidades, bastando para isso a habilitação da alimentação para correntes elevadas por meio

de jumpers individuais, posicionados ao lado de cada conector (desabilitado por *default*).

Por fim, foram adicionados três LEDs e uma buzina, que permitem a implementação de avisos visuais e sonoros em situações de perigo para o usuário, anormalidades no protótipo e para funções de teste.

A figura 25.2 mostra o aspecto da placa de circuito montada, porém sem os ESCs ou os sensores de refletância. O Arduino DUE e o receptor ficam montados abaixo da placa de circuito, como pode ser visualizado na figura 25.3.

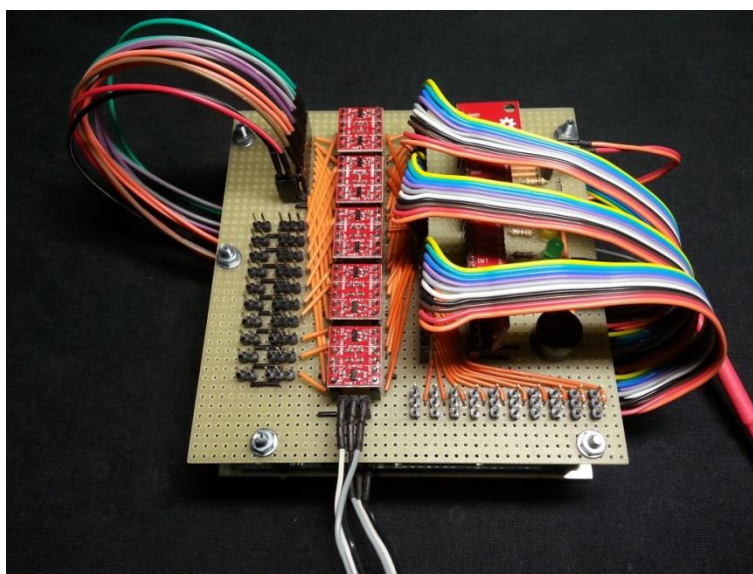


Figura 25.2 – Placa de circuito montada

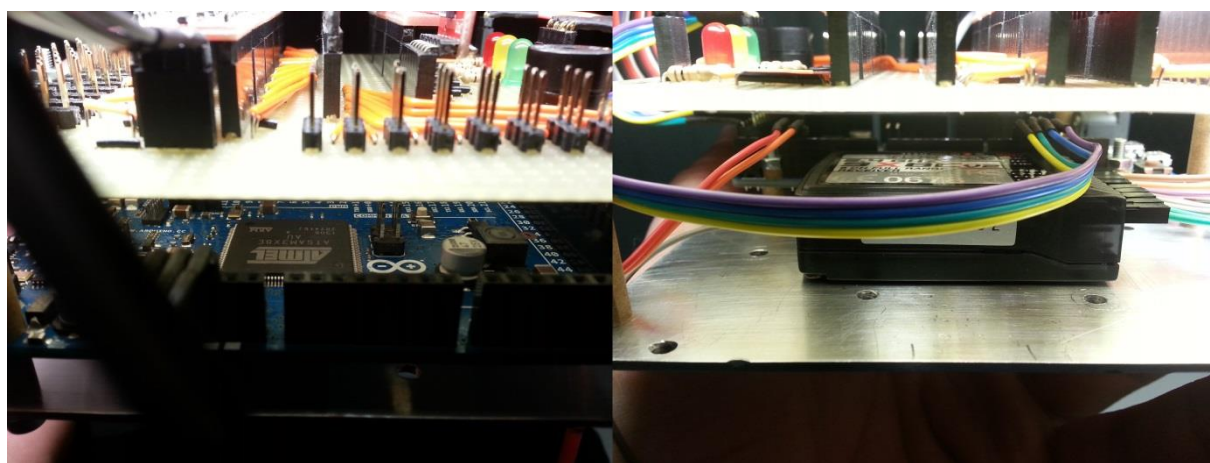


Figura 25.3 – Arduino DUE e o receptor montados abaixo da placa de circuito

25.2 Estrutura

A construção da estrutura apresentada na seção 17 envolveu processos de fabricação manuais simples, onde foram utilizadas ferramentas facilmente encontradas em qualquer residência.

A figura 25.4 mostra um dos componentes da estrutura sendo fabricado, a figura 25.5 mostra a estrutura montada, mas sem os componentes eletrônicos, sendo pesada, e a figura 25.6 mostra o protótipo completo e finalizado.



Figura 25.4 – Fabricação de um dos componentes de madeira



Figura 25.5 – Estrutura sem os componentes eletrônicos sendo pesada



Figura 25.6 – Protótipo completo e finalizado

Observe que no protótipo construído foram adicionadas hastes, que reduzem a chance dos rotores em movimento entrarem em contato com objetos de grandes dimensões ao seu redor. Esse cuidado foi tomado para permitir que testes em ambientes fechados se tornem mais seguros.

26 CONCLUSÕES

As atividades abordadas neste trabalho compreenderam a revisão bibliográfica, a obtenção do modelo dinâmico não linear do quadricóptero, seguido da sua linearização e representação em espaço de estados, o estabelecimento do esquema de sensoriamento necessário ao sistema de controle, a seleção e aquisição dos componentes, a execução do projeto do protótipo, a obtenção dos seus parâmetros físicos, a simulação, validação e análise do modelo não linear em malha aberta, o desenvolvimento teórico do sistema de controle e, por fim, a construção do protótipo.

Assim, uma vez que o protótipo obtido está pronto para receber o sistema de controle embarcado e iniciar os testes de campo necessários à sua validação, pode-se concluir que o objetivo global do trabalho foi atingido com sucesso.

Com relação aos detalhes do trabalho, alguns pontos merecem destaque.

Primeiramente, o modelo dinâmico em malha aberta obtido para o quadricóptero, embora tenha sido usado com sucesso ao longo deste trabalho, pode ser aprimorado em trabalhos futuros, com a consideração de efeitos aqui negligenciados ou tratados de forma superficial.

Um desses efeitos é a flexibilidade da estrutura, que possui modos de vibração pouco amortecidos que podem vir a corromper as medidas dos sensores embarcados, especialmente do acelerômetro. Além disso, a flexibilidade da estrutura pode vir a causar um desalinhamento nas direções das forças de sustentação, dos torques de arrasto e dos momentos giroscópicos dos rotores, ocasionando uma intensificação da instabilidade natural do sistema.

Outro efeito que, embora superficialmente considerado, deve ser estudado de forma mais completa, são as propriedades aerodinâmicas do quadricóptero, através de uma avaliação precisa do seu coeficiente de arrasto e sustentação como função da direção e intensidade do escoamento de ar incidente.

De uma forma geral, o sistema de controle desenvolvido com base no modelo linearizado apresentou resultados satisfatórios, mesmo quando aplicado sobre o modelo não linear. Tanto a ação de controle gerada a partir do estado completo, quanto a gerada a partir do estado reconstruído pelo observador de estado, depois, é claro, de encontradas as matrizes de ganhos de controle e de ganhos do

observador apropriadas, foram capazes de levar o sistema à condição de equilíbrio, representada pela origem da representação em espaço de estados. Assim, pode-se dizer que, em tese, o voo pairado já é possível.

Em contrapartida, o seguidor de referência desenvolvido com base no modelo linear apresentou um desempenho pouco satisfatório quando aplicado ao modelo não linear, apresentando um erro em regime permanente. Dessa forma, soluções alternativas precisarão ser exploradas para que o quadricóptero seja capaz de realizar trajetórias diversas, tais com a linearização por partes.

Um ponto do trabalho que demandou grande esforço e dispêndio de tempo foi a aquisição empírica dos dados necessários para a determinação dos parâmetros aerodinâmicos dos rotores e dos parâmetros dos motores elétricos. O desenvolvimento e fabricação da balança dinamométrica, necessária para medir as forças de empuxo e os torques de arrasto dos rotores, bem como do sistema de tacômetros, necessários para a amostragem em alta velocidade das rotações dos motores, formam um projeto a parte no âmbito da metrologia.

Por fim, a construção propriamente dita do protótipo acabou por apresentar poucos desafios, refletindo a simplicidade da sua concepção.

Com a conclusão deste trabalho, tem-se início o trabalho seguinte, que tratará do aprimoramento e implementação do sistema de controle desenvolvido no hardware embarcado, e a validação do protótipo.

REFERÊNCIAS

- ARDUINO DUE. **Arduino Due**, 2014. Disponível em: <<http://arduino.cc/en/Main/arduinoBoardDue>>. Acesso em: 12 out. 2014.
- ARDUINO FORUM. **BlueCopter - Arduino Quadcopter**. Disponível em: <<http://forum.arduino.cc/index.php?topic=184503.0>>. Acesso em: 12 out. 2014.
- ATMEL. **AT91SAM ARM-based Flash MCU - SAM3X and SAM3A Series**. 11057B-ATARM, 28 mai. 2012. Disponível em: <<http://www.atmel.com/Images/doc11057.pdf>>. Acesso em: 12 out. 2014.
- BRÉGUET, L.; BRÉGUET, J.; RICHET, J. **Bréguet-Richet Gyroplane No. 1**. 1907. Disponível em: <<http://flyingmachines.ru/Site2/Crafts/Craft28966.htm>>. Acesso em: 20 out. 2014.
- BOSCH. **BMA180 – Digital, triaxial acceleration sensor**. Versão 2.5, 07 dez. 2010. Disponível em: <<http://www.geeetech.com/Documents/BST-BMA180-DS000.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2014.
- BOSCH. **BMP085 Digital pressure sensor**. Versão 1.3, 22 ag. 2011. Disponível em: <<http://dlnmh9ip6v2uc.cloudfront.net/datasheets/Sensors/Pressure/BST-BMP085-DS000-06.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2014.
- BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. **Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor**. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation Barcelona, Spain, April 2005.
- CEDRO – IPT. **Informações sobre madeiras – Cedro**. Disponível em: <http://www.ipt.br/informacoes_madeiras/29.htm>. Acesso em: 10 set. 2014.
- COOK, M. V. **Flight Dynamics Principles – A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control**. 3rd Edition. Butterworth-Heinemann, 2013.

ETKIN, B. **Dynamics of Atmospheric Flight**. 1st Edition. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 2005. 581 p.

FAIRCHILD. **QRE1113GR SMT Reflective Object Sensor**. Versão 1.2.0, jan. 2008. Disponível em: <<http://www.pololu.com/file/0J117/QRE1113GR.pdf>>. Acesso em: 12 out. 2014.

FRANÇA, L. N. F.; MATSUMURA, A. Z. **Mecânica Geral**. 3a Edição. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher Ltda., 2011. 316 p.

FRIEDLAND, B. **Control System Design – An Introduction to State-Space Methods**. 1st Edition. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 2005. 513 p.

HONEYWELL. **3-Axis Digital Compass IC HMC5883L**. # 900405 Versão E, fev. 2013. Disponível em: <http://www.adafruit.com/datasheets/HMC5883L_3-Axis_Digital_Compass_IC.pdf>. Acesso em: 13 out. 2014.

HOUGHTON, E. L. et al. **Aerodynamics for Engineering Students**. 6th Edition. Waltham, MA: Butterworth-Heinemann, 2013. 724 p.

INVENSENSE. **ITG-3200 Product Specification**. Versão 1.4, 30 mar. 2010. Disponível em: <<http://www.geeetech.com/Documents/ITG-3205-00-01.4.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2014.

JIINEC, T. **Stabilization and Control of Unmanned Quadcopter**. Master's Thesis. Lulea University of Technology, Prague, May, 2011.

LEISHMAN, J. G. **The Bréguet-Richet Quad-Rotor Helicopter of 1907**. 2002.

SPARKFUN LOGIC LEVELS. **Logic Levels**. Disponível em: <<https://learn.sparkfun.com/tutorials/logic-levels>>. Acesso em: 12 out. 2014.

SPARKFUN USING THE LOGIC LEVEL CONVERTER. **Using the Logic Level Converter**. Disponível em: <<https://learn.sparkfun.com/tutorials/using-the-logic-level-converter>>. Acesso em: 13 out. 2014.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. Tradução da 4a edição americana: Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher Ltda., 2004. 571 p.

OGATA, K. **System Dynamics**. 4th Edition. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2004. 768 p.

POLOLU. **QTR-1A Reflectance Sensor**. Disponível em: <<http://www.pololu.com/product/2458>>. Acesso em: 12 out. 2014.

POUNDS, P. et al. **Design of a four rotor aerial robot**. Australasian Conference on Robotics and Automation. Auckland, 2002.

POUNDS, P.; MAHONY, R.; GRESHAM, J. **Towards dynamically-favorable quad-rotor aerial robots**. Australian National University, Canberra, Australia, 2004.

POUNDS, P.; MAHONY, R.; CORKE, P. **Modelling and control of a quad-rotor robot**. Australian National University, Canberra, Australia, 2006.

THE PIONEERS. **Bréguet-Richet Gyroplane No. 1**. 2002. Disponível em: <<http://www.ctie.monash.edu.au/hargrave/breguet.html>>. Acesso em: 20 out. 2014.

TURNIGY 9X. **Turnigy 9X 2.4 GHz Instruction Manual**. AEROALMEIDA, 2010. Disponível em: <<http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/uploads/811098777X365809X9.pdf>>. Acesso em: 12 out. 2014.

TURNIGY D2836. **D2836 Out Runner Brushless Motor Intruction**. Disponível em:
<<http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/uploads/1013956805X669553X33.pdf>>.
Acesso em: 12 out. 2014.

TURNIGY NANO-TECH. **Turnigy Nano-Tech 2200mAh 3S 25~50C LiPo Pack**.
Disponível em:
<https://www.hobbyking.com/hobbyking/store/_11911_Turnigy_nano_tech_2200mah_3S_25_50C_Lipo_Pack.html>. Acesso em: 12 out. 2014.

TURNIGY PLUSH. **TURNIGY Manual for Brushless Motor Speed Controller**.
Disponível em:
<<http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/uploads/1018013242X249624X6.pdf>>.
Acesso em: 12 out. 2014.

WELCH, G.; BISHOP, G. **An Introduction to the Kalman Filter**. University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science. Chapel Hill, NC: 2001. 47 p.
Disponível em:
<http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf>.
Acesso em: 27/10/2014.

APÊNDICE A – LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA

Linearização da equação de $\dot{x}_E$

$$\begin{aligned}\dot{x}_E &= c\theta \cdot c\psi \cdot u + (s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi) \cdot v + (c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\phi \cdot s\psi) \cdot w \\ \rightarrow \dot{x}_E &= c\theta \cdot c\psi \cdot u + s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi \cdot v - c\phi \cdot s\psi \cdot v + c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi \cdot w + s\phi \cdot s\psi \cdot w \\ \rightarrow \dot{x}_E &= f_1(\theta, \psi, u) + f_2(\phi, \theta, \psi, v) + f_3(\phi, \psi, v) + f_4(\phi, \theta, \psi, w) + f_5(\phi, \psi, w)\end{aligned}$$

$$f_1(\theta, \psi, u) = c\theta \cdot c\psi \cdot u$$

$$\begin{aligned}\rightarrow f_1(\theta, \psi, u) &= c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u_0 + s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u_0 \cdot \theta_0 + c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u_0 \cdot \psi_0 - c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u_0 \\ &\quad - s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u_0 \cdot \theta_0 - c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u_0 \cdot \psi_0 + c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u \\ &\rightarrow f_1(\theta, \psi, u) = u\end{aligned}$$

$$f_2(\phi, \theta, \psi, v) = s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi \cdot v$$

$$\begin{aligned}\rightarrow f_2(\phi, \theta, \psi, v) &= s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi_0 - s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \theta_0 \\ &\quad + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi_0 - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi \\ &\quad + s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \theta - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v \\ &\rightarrow f_2(\phi, \theta, \psi, v) = 0\end{aligned}$$

$$f_3(\phi, \psi, v) = -c\phi \cdot s\psi \cdot v$$

$$\begin{aligned}\rightarrow f_3(\phi, \psi, v) &= -c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 - s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi_0 + c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi_0 + c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \\ &\quad + s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi - c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi - c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v \\ &\rightarrow f_3(\phi, \psi, v) = 0\end{aligned}$$

$$f_4(\phi, \theta, \psi, w) = c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi \cdot w$$

$$\begin{aligned}\rightarrow f_4(\phi, \theta, \psi, w) &= c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi_0 - c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \theta_0 \\ &\quad + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi_0 - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi \\ &\quad + c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \theta - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w \\ &\rightarrow f_4(\phi, \theta, \psi, w) = 0\end{aligned}$$

$$f_5(\phi, \psi, w) = s\phi \cdot s\psi \cdot w$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow f_5(\phi, \psi, w) &= s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 - c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi_0 - s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi_0 - s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \\
&\quad + c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi + s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi + s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w \\
&\rightarrow f_5(\phi, \psi, w) = 0
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{x}_E = u \quad (13.2)$$

Linearização da equação de $\dot{y}_E$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_E &= c\theta \cdot s\psi \cdot u + (s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\phi \cdot c\psi) \cdot v + (c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi) \cdot w \\
\rightarrow \dot{y}_E &= c\theta \cdot s\psi \cdot u + s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi \cdot v + c\phi \cdot c\psi \cdot v + c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi \cdot w - s\phi \cdot c\psi \cdot w \\
\rightarrow \dot{y}_E &= f_6(\theta, \psi, u) + f_7(\phi, \theta, \psi, v) + f_8(\phi, \psi, v) + f_9(\phi, \theta, \psi, w) + f_{10}(\phi, \psi, w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6(\theta, \psi, u) &= c\theta \cdot s\psi \cdot u \\
\rightarrow f_6(\theta, \psi, u) &= c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u_0 + s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u_0 \cdot \theta_0 - c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u_0 \cdot \psi_0 - c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u_0 \\
&\quad - s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u_0 \cdot \theta + c\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot u_0 \cdot \psi + c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot u \\
&\rightarrow f_6(\theta, \psi, u) = s0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7(\phi, \theta, \psi, v) &= s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi \cdot v \\
\rightarrow f_7(\phi, \theta, \psi, v) &= s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi_0 - s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \theta_0 \\
&\quad - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi_0 - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi \\
&\quad + s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \theta + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot v \\
&\rightarrow f_7(\phi, \theta, \psi, v) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_8(\phi, \psi, v) &= c\phi \cdot c\psi \cdot v \\
\rightarrow f_8(\phi, \psi, v) &= c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 + s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi_0 + c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi_0 - c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \\
&\quad - s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v_0 \cdot \phi - c\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot v_0 \cdot \psi + c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot v \\
&\rightarrow f_8(\phi, \psi, v) = v
\end{aligned}$$

$$f_9(\phi, \theta, \psi, w) = c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi \cdot w$$

$$\rightarrow f_9(\phi, \theta, \psi, w)$$

$$\begin{aligned} &= c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi_0 - c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \theta_0 \\ &- c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi_0 - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi \\ &+ c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \theta + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot s\psi_0 \cdot w \\ &\rightarrow f_9(\phi, \theta, \psi, w) = 0 \end{aligned}$$

$$f_{10}(\phi, \psi, w) = -s\phi \cdot c\psi \cdot w$$

$$\rightarrow f_{10}(\phi, \psi, w)$$

$$\begin{aligned} &= -s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 + c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi_0 - s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi_0 + s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \\ &- c\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w_0 \cdot \phi + s\phi_0 \cdot s\psi_0 \cdot w_0 \cdot \psi - s\phi_0 \cdot c\psi_0 \cdot w \\ &\rightarrow f_{10}(\phi, \psi, w) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{y}_E = v \quad (13.3)$$

Linearização da equação de $\dot{z}_E$

$$\begin{aligned} \dot{z}_E &= -s\theta \cdot u + s\phi \cdot c\theta \cdot v + c\phi \cdot c\theta \cdot w \\ \rightarrow \dot{z}_E &= f_{11}(\theta, u) + f_{12}(\phi, \theta, v) + f_{13}(\phi, \theta, w) \end{aligned}$$

$$f_{11}(\theta, u) = -s\theta \cdot u$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f_{11}(\theta, u) &= -s\theta_0 \cdot u_0 + c\theta_0 \cdot u_0 \cdot \theta_0 + s\theta_0 \cdot u_0 - c\theta_0 \cdot u_0 \cdot \theta - s\theta_0 \cdot u \\ &\rightarrow f_{11}(\theta, u) = 0 \end{aligned}$$

$$f_{12}(\phi, \theta, v) = s\phi \cdot c\theta \cdot v$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f_{12}(\phi, \theta, v) &= s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot v_0 - c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot v_0 \cdot \phi_0 + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot v_0 \cdot \theta_0 - s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot v_0 \\ &+ c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot v_0 \cdot \phi - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot v_0 \cdot \theta + s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot v \\ &\rightarrow f_{12}(\phi, \theta, v) = 0 \end{aligned}$$

$$f_{13}(\phi, \theta, w) = c\phi \cdot c\theta \cdot w$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f_{13}(\phi, \theta, w) &= c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot w_0 + s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot w_0 \cdot \phi_0 + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot w_0 \cdot \theta_0 - c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot w_0 \\ &- s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot w_0 \cdot \phi - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot w_0 \cdot \theta + c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot w \\ &\rightarrow f_{13}(\phi, \theta, w) = w \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{z}_E = w \quad (13.4)$$

Linearização da equação de $\dot{\phi}$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + s\phi \cdot \tan \theta \cdot q + c\phi \cdot \tan \theta \cdot r \\ \rightarrow \dot{\phi} &= p + f_{14}(\phi, \theta, q) + f_{15}(\phi, \theta, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{14}(\phi, \theta, q) &= s\phi \cdot \tan \theta \cdot q \\ \rightarrow f_{14}(\phi, \theta, q) &= s\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q_0 - c\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q_0 \cdot \phi_0 - s\phi_0 \cdot (\sec \theta_0)^2 \cdot q_0 \cdot \theta_0 \\ &\quad - s\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q_0 + c\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q_0 \cdot \phi + s\phi_0 \cdot (\sec \theta_0)^2 \cdot q_0 \cdot \theta + s\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q \\ &\rightarrow f_{14}(\phi, \theta, q) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{15}(\phi, \theta, r) &= c\phi \cdot \tan \theta \cdot r \\ \rightarrow f_{15}(\phi, \theta, r) &= c\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r_0 + s\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r_0 \cdot \phi_0 - c\phi_0 \cdot (\sec \theta_0)^2 \cdot r_0 \cdot \theta_0 \\ &\quad - c\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r_0 - s\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r_0 \cdot \phi + c\phi_0 \cdot (\sec \theta_0)^2 \cdot r_0 \cdot \theta + c\phi_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r \\ &\rightarrow f_{15}(\phi, \theta, r) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{\phi} = p \quad (13.5)$$

Linearização da equação de $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= c\phi \cdot q - s\phi \cdot r \\ \rightarrow \dot{\theta} &= f_{16}(\phi, q) + f_{17}(\phi, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{16}(\phi, q) &= c\phi \cdot q \\ \rightarrow f_{16}(\phi, q) &= c\phi_0 \cdot q_0 + s\phi_0 \cdot q_0 \cdot \phi_0 - c\phi_0 \cdot q_0 - s\phi_0 \cdot q_0 \cdot \phi + c\phi_0 \cdot q \\ &\rightarrow f_{16}(\phi, q) = q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{17}(\phi, r) &= -s\phi \cdot r \\ \rightarrow f_{17}(\phi, r) &= -s\phi_0 \cdot r_0 + c\phi_0 \cdot r_0 \cdot \phi_0 + s\phi_0 \cdot r_0 - c\phi_0 \cdot r_0 \cdot \phi - s\phi_0 \cdot r \\ &\rightarrow f_{17}(\phi, r) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{\theta} = q \quad (13.6)$$

Linearização da equação de $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = s\phi \cdot \sec \theta \cdot q + c\phi \cdot \sec \theta \cdot r$$

$$\rightarrow \dot{\psi} = f_{18}(\phi, \theta, q) + f_{19}(\phi, \theta, r)$$

$$f_{18}(\phi, \theta, q) = s\phi \cdot \sec \theta \cdot q$$

$$\rightarrow f_{18}(\phi, \theta, q) = s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot q_0 - c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot q_0 \cdot \phi_0 - s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q_0 \cdot \theta_0$$

$$- s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot q_0 + c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot q_0 \cdot \phi + s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot q_0 \cdot \theta$$

$$+ s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot q$$

$$\rightarrow f_{18}(\phi, \theta, q) = 0$$

$$f_{19}(\phi, \theta, r) = c\phi \cdot \sec \theta \cdot r$$

$$\rightarrow f_{19}(\phi, \theta, r) = c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot r_0 + s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot r_0 \cdot \phi_0 - c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r_0 \cdot \theta_0$$

$$- c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot r_0 - s\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot r_0 \cdot \phi + c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot \tan \theta_0 \cdot r_0 \cdot \theta$$

$$+ c\phi_0 \cdot \sec \theta_0 \cdot r$$

$$\rightarrow f_{19}(\phi, \theta, r) = r$$

$$\rightarrow \dot{\psi} = r \quad (13.7)$$

Linearização da equação de $\dot{u}$

$$\dot{u} = r \cdot v - q \cdot w - g \cdot s\theta - \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} u \cdot \sqrt{u^2}$$

$$\rightarrow \dot{u} = f_{20}(r, v) + f_{21}(q, w) + f_{22}(\theta) + f_{23}(u)$$

$$f_{20}(r, v) = r \cdot v$$

$$\rightarrow f_{20}(r, v) = -r_0 \cdot v_0 + v_0 \cdot r + r_0 \cdot v$$

$$\rightarrow f_{20}(r, v) = 0$$

$$f_{21}(q, w) = -q \cdot w$$

$$\rightarrow f_{21}(q, w) = q_0 \cdot w_0 - w_0 \cdot q - q_0 \cdot w$$

$$\rightarrow f_{21}(q, w) = 0$$

$$\begin{aligned}
f_{22}(\theta) &= -g \cdot s\theta \\
\rightarrow f_{22}(\theta) &= g \cdot (-s\theta_0 + c\theta_0 \cdot \theta_0 - c\theta_0 \cdot \theta) \\
\rightarrow f_{22}(\theta) &= -g \cdot \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{23}(u) &= \mp \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} u^2 \\
\rightarrow f_{23}(u) &= \mp \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{m} \left(-\frac{u_0^2}{2} + u_0 \cdot u \right) \\
\rightarrow f_{23}(u) &= 0
\end{aligned}$$

onde o sinal negativo em f_{23} vale para quando $u > 0$.

$$\rightarrow \dot{u} = -g \cdot \theta \quad (13.8)$$

Linearização da equação de $\dot{v}$

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= p \cdot w - r \cdot u + g \cdot s\phi \cdot c\theta - \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} v \cdot \sqrt{v^2} \\
\rightarrow \dot{v} &= f_{24}(p, w) + f_{25}(r, u) + f_{26}(\phi, \theta) + f_{27}(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{24}(p, w) &= p \cdot w \\
\rightarrow f_{24}(p, w) &= -p_0 \cdot w_0 + w_0 \cdot p + p_0 \cdot w \\
\rightarrow f_{24}(p, w) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{25}(r, u) &= -r \cdot u \\
\rightarrow f_{25}(r, u) &= r_0 \cdot u_0 - u_0 \cdot r - r_0 \cdot u \\
\rightarrow f_{25}(r, u) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{26}(\phi, \theta) &= g \cdot s\phi \cdot c\theta \\
\rightarrow f_{26}(\phi, \theta) &= g \cdot (s\phi_0 \cdot c\theta_0 - c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot \phi_0 + s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot \theta_0 + c\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot \phi - s\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot \theta) \\
\rightarrow f_{26}(\phi, \theta) &= g \cdot \phi
\end{aligned}$$

$$f_{27}(v) = \mp \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} v^2$$

$$\rightarrow f_{27}(v) = \mp \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{m} \left(-\frac{v_0^2}{2} + v_0 \cdot v \right)$$

$$\rightarrow f_{27}(v) = 0$$

onde o sinal negativo em f_{27} vale para quando $v > 0$.

$$\rightarrow \dot{v} = g \cdot \phi \quad (13.9)$$

Linearização da equação de $\dot{w}$

$$\dot{w} = q \cdot u - p \cdot v + g \cdot c\phi \cdot c\theta - \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} w \cdot \sqrt{w^2}$$

$$- \frac{\rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2)$$

$$\rightarrow \dot{w} = q \cdot u - p \cdot v + g \cdot c\phi \cdot c\theta - \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} w \cdot \sqrt{w^2} - \frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - \frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_2} \cdot \Omega_2^2$$

$$- \frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 - \frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_4} \cdot \Omega_4^2$$

$$\rightarrow \dot{w} = f_{28}(q, u) + f_{29}(p, v) + f_{30}(\phi, \theta) + f_{31}(w) + f_{32}(\Omega_1) + f_{33}(\Omega_2) + f_{34}(\Omega_3)$$

$$+ f_{35}(\Omega_4)$$

$$f_{28}(q, u) = q \cdot u$$

$$\rightarrow f_{28}(q, u) = -q_0 \cdot u_0 + u_0 \cdot q + q_0 \cdot u$$

$$\rightarrow f_{28}(q, u) = 0$$

$$f_{29}(p, v) = -p \cdot v$$

$$\rightarrow f_{29}(p, v) = p_0 \cdot v_0 - v_0 \cdot p - p_0 \cdot v$$

$$\rightarrow f_{29}(p, v) = 0$$

$$f_{30}(\phi, \theta) = g \cdot c\phi \cdot c\theta$$

$$\rightarrow f_{30}(\phi, \theta) = g \cdot (c\phi_0 \cdot c\theta_0 + s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot \phi_0 + c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot \theta_0 - s\phi_0 \cdot c\theta_0 \cdot \phi - c\phi_0 \cdot s\theta_0 \cdot \theta)$$

$$\rightarrow f_{30}(\phi, \theta) = g$$

$$f_{31}(w) = \mp \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{2 \cdot m} w^2$$

$$\rightarrow f_{31}(w) = \mp \frac{\rho \cdot S \cdot C_D}{m} \left(-\frac{w_0^2}{2} + w_0 \cdot w \right)$$

$$\rightarrow f_{31}(w) = 0$$

onde o sinal negativo em f_{31} vale para quando $w > 0$.

$$f_{32}(\Omega_1) = -\frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_1} \cdot \Omega_1^2$$

$$\rightarrow f_{32}(\Omega_1) = \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{10}^2 - 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1)$$

$$f_{33}(\Omega_2) = -\frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_2} \cdot \Omega_2^2$$

$$\rightarrow f_{33}(\Omega_2) = \frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{20}^2 - 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2)$$

$$f_{34}(\Omega_3) = -\frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_3} \cdot \Omega_3^2$$

$$\rightarrow f_{34}(\Omega_3) = \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{30}^2 - 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3)$$

$$f_{35}(\Omega_4) = -\frac{\rho \cdot D^4}{m} k_{T_4} \cdot \Omega_4^2$$

$$\rightarrow f_{35}(\Omega_4) = \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{40}^2 - 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4)$$

$$\rightarrow \dot{w} = g + \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{10}^2 - 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1) + \frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{20}^2 - 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2)$$

$$+ \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{30}^2 - 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3) + \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot D^4}{m} (\Omega_{40}^2 - 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4)$$

$$\rightarrow \dot{w} = g + \frac{\rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10}^2 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20}^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30}^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40}^2)$$

$$- \frac{2 \cdot \rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4)$$

$$\rightarrow \dot{w} = 2 \cdot g - \frac{2 \cdot \rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4)$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \dot{w} &= 2 \cdot g - \frac{2 \cdot \rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10}^2 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20}^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30}^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40}^2) \\
&\quad - \frac{2 \cdot \rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{w} &= 2 \cdot g - 2 \cdot g \\
&\quad - \frac{2 \cdot \rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{w} &= -\frac{2 \cdot \rho \cdot D^4}{m} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 + k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{w} &= -\frac{2 \cdot k_{T_1} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{10}}{m} \Delta\Omega_1 - \frac{2 \cdot k_{T_2} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{20}}{m} \Delta\Omega_2 \\
&\quad - \frac{2 \cdot k_{T_3} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{30}}{m} \Delta\Omega_3 - \frac{2 \cdot k_{T_4} \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \Omega_{40}}{m} \Delta\Omega_4 \tag{13.10}
\end{aligned}$$

Linearização da equação de $\dot{p}$

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r + \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \cdot q \\
&\quad + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \\
\rightarrow \dot{p} &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r - \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_1 \cdot q + \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_2 \cdot q - \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_3 \cdot q + \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_4 \cdot q - \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 \\
&\quad - \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_4} \cdot \Omega_4^2 \\
\rightarrow \dot{p} &= f_{36}(q, r) + f_{37}(\Omega_1, q) + f_{38}(\Omega_2, q) + f_{39}(\Omega_3, q) + f_{40}(\Omega_4, q) + f_{41}(\Omega_1) + f_{42}(\Omega_2) \\
&\quad + f_{43}(\Omega_3) + f_{44}(\Omega_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{36}(q, r) &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} q \cdot r \\
\rightarrow f_{36}(q, r) &= \frac{(I_B^{yy} - I_B^{zz})}{I_B^{xx}} (-q_0 \cdot r_0 + r_0 \cdot q + q_0 \cdot r) \\
\rightarrow f_{36}(q, r) &= 0
\end{aligned}$$

$$f_{37}(\Omega_1, q) = -\frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_1 \cdot q$$

$$\rightarrow f_{37}(\Omega_1, q) = -\frac{I^r}{I_B^{xx}}(-\Omega_{10} \cdot q_0 + q_0 \cdot \Omega_1 + \Omega_{10} \cdot q)$$

$$\rightarrow f_{37}(\Omega_1, q) = -\frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{10} \cdot q$$

$$f_{38}(\Omega_2, q) = \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_2 \cdot q$$

$$\rightarrow f_{38}(\Omega_2, q) = \frac{I^r}{I_B^{xx}}(-\Omega_{20} \cdot q_0 + q_0 \cdot \Omega_2 + \Omega_{20} \cdot q)$$

$$\rightarrow f_{38}(\Omega_2, q) = \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{20} \cdot q$$

$$f_{39}(\Omega_3, q) = -\frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_3 \cdot q$$

$$\rightarrow f_{39}(\Omega_3, q) = -\frac{I^r}{I_B^{xx}}(-\Omega_{30} \cdot q_0 + q_0 \cdot \Omega_3 + \Omega_{30} \cdot q)$$

$$\rightarrow f_{39}(\Omega_3, q) = -\frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{30} \cdot q$$

$$f_{40}(\Omega_4, q) = \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_4 \cdot q$$

$$\rightarrow f_{40}(\Omega_4, q) = \frac{I^r}{I_B^{xx}}(-\Omega_{40} \cdot q_0 + q_0 \cdot \Omega_4 + \Omega_{40} \cdot q)$$

$$\rightarrow f_{40}(\Omega_4, q) = \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{40} \cdot q$$

$$f_{41}(\Omega_1) = -\frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_1} \cdot \Omega_1^2$$

$$\rightarrow f_{41}(\Omega_1) = -\frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}}(-\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1)$$

$$f_{42}(\Omega_2) = -\frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_2} \cdot \Omega_2^2$$

$$\rightarrow f_{42}(\Omega_2) = -\frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}}(-\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2)$$

$$\begin{aligned}
f_{43}(\Omega_3) &= \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 \\
\rightarrow f_{43}(\Omega_3) &= \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3) \\
\\
f_{44}(\Omega_4) &= \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} k_{T_4} \cdot \Omega_4^2 \\
\rightarrow f_{44}(\Omega_4) &= \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4) \\
\\
\rightarrow \dot{p} &= -\frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{10} \cdot q + \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{20} \cdot q - \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{30} \cdot q + \frac{I^r}{I_B^{xx}} \Omega_{40} \cdot q \\
&\quad - \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1) - \frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2) \\
&\quad + \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3) + \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4) \\
\rightarrow \dot{p} &= \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_{10} + \Omega_{20} - \Omega_{30} + \Omega_{40}) \cdot q - \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1) \\
&\quad - \frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2) + \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3) \\
&\quad + \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{p} &= \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_{10} + \Omega_{20} - \Omega_{30} + \Omega_{40}) \cdot q \\
&\quad + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-k_{T_1} \cdot \Omega_{10}^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_{20}^2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30}^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40}^2) \\
&\quad + \frac{2 \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 - k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{p} &= \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_{10} + \Omega_{20} - \Omega_{30} + \Omega_{40}) \cdot q \\
&\quad + \frac{2 \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{xx}} (-k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 - k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 + k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \dot{p} = & \frac{I^r}{I_B^{xx}} (-\Omega_{10} + \Omega_{20} - \Omega_{30} + \Omega_{40}) \cdot q \\
& - \frac{2 \cdot k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{10}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_1 \\
& - \frac{2 \cdot k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{20}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_2 \\
& + \frac{2 \cdot k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{30}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_3 \\
& + \frac{2 \cdot k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{40}}{I_B^{xx}} \Delta \Omega_4
\end{aligned} \tag{13.11}$$

Linearização da equação de $\dot{q}$

$$\begin{aligned}
\dot{q} = & \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} p \cdot r + \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \cdot p \\
& + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_4^2) \\
\rightarrow \dot{q} = & \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} p \cdot r + \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_1 \cdot p - \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_2 \cdot p + \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_3 \cdot p - \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_4 \cdot p + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_1} \cdot \Omega_1^2 \\
& - \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_2} \cdot \Omega_2^2 - \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_4} \cdot \Omega_4^2 \\
\rightarrow \dot{q} = & f_{45}(p, r) + f_{46}(\Omega_1, p) + f_{47}(\Omega_2, p) + f_{48}(\Omega_3, p) + f_{49}(\Omega_4, p) + f_{50}(\Omega_1) + f_{51}(\Omega_2) \\
& + f_{52}(\Omega_3) + f_{53}(\Omega_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{45}(p, r) = & \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} p \cdot r \\
\rightarrow f_{45}(p, r) = & \frac{(I_B^{zz} - I_B^{xx})}{I_B^{yy}} (-p_0 \cdot r_0 + r_0 \cdot p + p_0 \cdot r) \\
\rightarrow f_{45}(p, r) = & 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{46}(\Omega_1, p) = & \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_1 \cdot p \\
\rightarrow f_{46}(\Omega_1, p) = & \frac{I^r}{I_B^{yy}} (-\Omega_{10} \cdot p_0 + p_0 \cdot \Omega_1 + \Omega_{10} \cdot p)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow f_{46}(\Omega_1, p) = \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{10} \cdot p$$

$$f_{47}(\Omega_2, p) = -\frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_2 \cdot p$$

$$\rightarrow f_{47}(\Omega_2, p) = -\frac{I^r}{I_B^{yy}} (-\Omega_{20} \cdot p_0 + p_0 \cdot \Omega_2 + \Omega_{20} \cdot p)$$

$$\rightarrow f_{47}(\Omega_2, p) = -\frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{20} \cdot p$$

$$f_{48}(\Omega_3, p) = \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_3 \cdot p$$

$$\rightarrow f_{48}(\Omega_3, p) = \frac{I^r}{I_B^{yy}} (-\Omega_{30} \cdot p_0 + p_0 \cdot \Omega_3 + \Omega_{30} \cdot p)$$

$$\rightarrow f_{48}(\Omega_3, p) = \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{30} \cdot p$$

$$f_{49}(\Omega_4, p) = -\frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_4 \cdot p$$

$$\rightarrow f_{49}(\Omega_4, p) = -\frac{I^r}{I_B^{yy}} (-\Omega_{40} \cdot p_0 + p_0 \cdot \Omega_4 + \Omega_{40} \cdot p)$$

$$\rightarrow f_{49}(\Omega_4, p) = -\frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{40} \cdot p$$

$$f_{50}(\Omega_1) = \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_1} \cdot \Omega_1^2$$

$$\rightarrow f_{50}(\Omega_1) = \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1)$$

$$f_{51}(\Omega_2) = -\frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_2} \cdot \Omega_2^2$$

$$\rightarrow f_{51}(\Omega_2) = -\frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2)$$

$$\begin{aligned}
f_{52}(\Omega_3) &= -\frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_3} \cdot \Omega_3^2 \\
\rightarrow f_{52}(\Omega_3) &= -\frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3) \\
f_{53}(\Omega_4) &= \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} k_{T_4} \cdot \Omega_4^2 \\
\rightarrow f_{53}(\Omega_4) &= \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4) \\
\rightarrow \dot{q} &= \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{10} \cdot p - \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{20} \cdot p + \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{30} \cdot p - \frac{I^r}{I_B^{yy}} \Omega_{40} \cdot p + \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1) \\
&\quad - \frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2) - \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3) \\
&\quad + \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (-\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4) \\
\rightarrow \dot{q} &= \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_{10} - \Omega_{20} + \Omega_{30} - \Omega_{40}) \cdot p + \frac{k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1) \\
&\quad - \frac{k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2) - \frac{k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3) \\
&\quad + \frac{k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{q} &= \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_{10} - \Omega_{20} + \Omega_{30} - \Omega_{40}) \cdot p \\
&\quad + \frac{\rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10}^2 - k_{T_2} \cdot \Omega_{20}^2 - k_{T_3} \cdot \Omega_{30}^2 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40}^2) \\
&\quad + \frac{2 \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 - k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 - k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
\rightarrow \dot{q} &= \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_{10} - \Omega_{20} + \Omega_{30} - \Omega_{40}) \cdot p \\
&\quad + \frac{2 \cdot \rho \cdot l \cdot D^4}{I_B^{yy}} (k_{T_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 - k_{T_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 - k_{T_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{T_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \dot{q} &= \frac{I^r}{I_B^{yy}} (\Omega_{10} - \Omega_{20} + \Omega_{30} - \Omega_{40}) \cdot p \\
&+ \frac{2 \cdot k_{T_1} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{10}}{I_B^{yy}} \Delta \Omega_1 \\
&- \frac{2 \cdot k_{T_2} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{20}}{I_B^{yy}} \Delta \Omega_2 \\
&- \frac{2 \cdot k_{T_3} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{30}}{I_B^{yy}} \Delta \Omega_3 \\
&+ \frac{2 \cdot k_{T_4} \cdot \rho \cdot l \cdot D^4 \cdot \Omega_{40}}{I_B^{yy}} \Delta \Omega_4
\end{aligned} \tag{13.12}$$

Linearização da equação de $\dot{r}$

$$\begin{aligned}
\dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \\
&= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q + \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2) \\
\rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \\
&= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q - \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2 + \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2 - \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2 \\
&+ \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2 \\
\rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) &= f_{54}(p, q) + f_{55}(\Omega_1) + f_{56}(\Omega_2) + f_{57}(\Omega_3) + f_{58}(\Omega_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{54}(p, q) &= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} p \cdot q \\
\rightarrow f_{54}(p, q) &= \frac{(I_B^{xx} - I_B^{yy})}{I_B^{zz}} (-p_0 \cdot q_0 + q_0 \cdot p + p_0 \cdot q) \\
\rightarrow f_{54}(p, q) &= 0
\end{aligned}$$

$$f_{55}(\Omega_1) = -\frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_1} \cdot \Omega_1^2$$

$$\rightarrow f_{55}(\Omega_1) = -\frac{k_{Q_1} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1)$$

$$f_{56}(\Omega_2) = \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_2} \cdot \Omega_2^2$$

$$\rightarrow f_{56}(\Omega_2) = \frac{k_{Q_2} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2)$$

$$f_{57}(\Omega_3) = -\frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_3} \cdot \Omega_3^2$$

$$\rightarrow f_{57}(\Omega_3) = -\frac{k_{Q_3} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3)$$

$$f_{58}(\Omega_4) = \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} k_{Q_4} \cdot \Omega_4^2$$

$$\rightarrow f_{58}(\Omega_4) = \frac{k_{Q_4} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4)$$

$$\rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4)$$

$$= -\frac{k_{Q_1} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Omega_1) + \frac{k_{Q_2} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Omega_2) \\ - \frac{k_{Q_3} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Omega_3) + \frac{k_{Q_4} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Omega_4)$$

$$\rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4)$$

$$= -\frac{k_{Q_1} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (\Omega_{10}^2 + 2 \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1) + \frac{k_{Q_2} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (\Omega_{20}^2 + 2 \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2) \\ - \frac{k_{Q_3} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (\Omega_{30}^2 + 2 \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3) + \frac{k_{Q_4} \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (\Omega_{40}^2 + 2 \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4)$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \\
& = \frac{\rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-k_{Q_1} \cdot \Omega_{10}^2 + k_{Q_2} \cdot \Omega_{20}^2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_{30}^2 + k_{Q_4} \cdot \Omega_{40}^2) \\
& \quad + \frac{2 \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-k_{Q_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 + k_{Q_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{Q_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
& \rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} (\dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_3 - \dot{\Omega}_4) \\
& = \frac{2 \cdot \rho \cdot D^5}{I_B^{zz}} (-k_{Q_1} \cdot \Omega_{10} \cdot \Delta\Omega_1 + k_{Q_2} \cdot \Omega_{20} \cdot \Delta\Omega_2 - k_{Q_3} \cdot \Omega_{30} \cdot \Delta\Omega_3 + k_{Q_4} \cdot \Omega_{40} \cdot \Delta\Omega_4) \\
& \rightarrow \dot{r} + \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_1 - \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_2 + \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_3 - \frac{I^r}{I_B^{zz}} \dot{\Omega}_4 \\
& = -\frac{2 \cdot k_{Q_1} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{10}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_1 \\
& \quad + \frac{2 \cdot k_{Q_2} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{20}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_2 - \frac{2 \cdot k_{Q_3} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{30}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_3 \\
& \quad + \frac{2 \cdot k_{Q_4} \cdot \rho \cdot D^5 \cdot \Omega_{40}}{I_B^{zz}} \Delta\Omega_4
\end{aligned} \tag{13.13}$$

Equação de $\dot{\Omega}_i$

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_i & = -\frac{1}{T_{m_i}} \Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} u_i \\
\rightarrow \dot{\Omega}_i & = -\frac{1}{T_{m_i}} (\Omega_{i0} + \Delta\Omega_i) + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} (u_{i0} + \Delta u_i) \\
\rightarrow \dot{\Omega}_i & = -\frac{1}{T_{m_i}} \Omega_{i0} + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} u_{i0} - \frac{1}{T_{m_i}} \Delta\Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} \Delta u_i
\end{aligned}$$

como $u_{i0} = \frac{\Omega_{i0}}{K_{m_i}}$, então

$$\rightarrow \dot{\Omega}_i = -\frac{1}{T_{m_i}} \Delta\Omega_i + \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} \Delta u_i \tag{13.14}$$